אנליזה הרמונית - תרגול מס' 1

יובל חצ'טריאן

26 באוקטובר 2017

1 פונקציות רציפות למקוטעין

הגדרה 1.1 תהי פונקצה $f:[a,b]\to\mathbb{R}$. נאמר ש f רציפה למקוטעין אם מספר נקודות האי רציפות שלה ונקודות בהן היא אינה מוגדרת שלה סופי, ולכל נקודה קיימים הגבולות החד־צדדיים. אם $f:[a,b]\to\mathbb{C}$ היא פונקציה מרוכבת, ו $f(x)=u(x)+iv(x)$ כאשר u ו v הן פונקציות ממשיות, נאמר ש f רציפה למקוטעין אם u ממשית וגם v ממשית.

דוגמא 1.2 נגדיר $f:[-1,1]\to\mathbb{R}$ באופן הבא:

$$f(x)=\begin{cases}0 & x\leq 0\\ 1 & x>0\end{cases}.$$

אזי $f(x)$ היא רציפה למקוטעין. יש לה נק' אי רציפות אחת והיא 0 והגבולות החד צדיים שם קיימים.

$$\lim_{x\to0^{+}}f(x)=1$$
$$\lim_{x\to0^{-}}f(x)=0.$$

דוגמא 1.3 נגדיר $f:[-1,1]\to\mathbb{R}$ באופן הבא:

$$f(x)=\begin{cases}\frac{1}{x} & x\neq 0\\ 10^{6} & x=0\end{cases}.$$

אזי f אינה רציפה למקוטעין, כיוון שהגבולות החד צדדיים ב 0 אינם קיימים.

דוגמא 1.4 נגדיר $f:[-1,1]\to\mathbb{R}$ על ידי:

$$f(x)=\begin{cases}sin\frac{1}{x} & x>0\\ 0 & x\leq 0\end{cases}$$

הפונקציה שוב אינה רציפה למקוטעין כי הגבול הימני ב 0 אינו קיים.

את אוסף הפונקציוה הרציפות למקוטעין מהקטע $[a,b]$ ל $\mathbb{C}$ נסמן על ידי $E[a,b]$.

הערה 1.5 כזכור מהקורס באינפי, רציפות למקוטעין הינה תנאי הכרחי ומספיק לאינטגרביליות בקטע. בנוסף אם $f(x)=u(x)+iv(x)$ היא פונקיה מרוכבת האינטגרל $\int_a^b f(x)\,\mathbf{d}x$ מוגדר פשוט על ידי

$$\int_a^b f(x)\,\mathbf{d}x=\int_a^b u(x)\,\mathbf{d}x+i\int_a^b v(x)\,\mathbf{d}x .$$

כמו כן, אם אם $f(x)=u(x)+iv(x)$, אזי הצמודה שלה הוא$\overline{f(x)}=u(x)-iv(x)$.

אבחנה 1.6 אוסף הפונקציות הרציפות למקוטעין הוא סגור לכפל וחיבור, מה שהופך אותו למרחב וקטורי.

הגדרה 1.7 על המרחב $E[-\pi,\pi]$נגדיר "מכפלה פנימית" באופן הבא:

$$\langle f,g\rangle=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\overline{g(x)}\mathbf{d}x .$$

הפונקציה מקיימת את רוב הדרישות של המכפלה הפנימית.

1. $0\leq\langle f,f\rangle$. (אי שליליות)
2. $\langle f,g\rangle=\overline{\langle g,f\rangle}$(הרמיטיות)
3. $\langle af_1+bf_2,g\rangle=a<f_1,g>+b<f_2,g>$.

הפונקציה היא "כמעט מכפלה שלילית" פרט לדרישה ש $f=0 \Leftrightarrow <f,f>=0$.

הערה 1.8 ניתן להפוך את $\langle\rangle$למכפלה בכמה דרכים. אחד זה להגדיר יחס שקילות $\sim$ על $E[-\pi,\pi]$ על ידי $f\sim g$ אם $\langle f-g,f-g\rangle=0$ או לחלופין להסתכל על מרחב הפונקצוית רציפות. לא נעמיק בנושאים הללו בקורס.

2 מקדמי פורייה - הגדרה, חישוב ודוגמאות.

הגדרה 2.1 בהינתן פונקציה $f(x)\in E[a,b]$, נאמר ש $\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}a_n\cos nx+b_n\sin nx$ הוא פתוח פורייה של f ונסמן

$$f(x)\sim\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}a_n\cos nx+b_n\sin nx$$

כאשר

$$a_0=\langle f,1\rangle=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\,\mathbf{d}x$$
$$a_n=\langle f,\cos nx\rangle=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos nx\mathbf{d}x$$
$$b_n=\langle f,\sin nx\rangle=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\sin nx\mathbf{d}x .$$

לעיתים גם נסמן את הפיתוח פורייה של f בעזרת $F(f)$.

2.1 דרכי חישוב מהירות

להלן נביא כמה כללים שמקלים על החישוב של הטורים.

1. אם $c\in E\left[-\pi,\pi\right]$ היא פונקציה קבועה, $F\left(c\right)=c$. **הוכחה:** עבור $n\neq0$ מתקיים

$$\begin{aligned}a_{n}&=\left\langle c,\cos nx\right\rangle =\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}c\cos nx\mathbf{d}x=c\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\cos nx\mathbf{d}x=0\\ b_{n}&=\left\langle c,\sin nx\right\rangle =\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}c\sin nx\mathbf{d}x=c\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\sin nx\mathbf{d}x=0\end{aligned}$$

עבור $n=0$ נקבל

$$a_{0}=\left\langle c,1\right\rangle =\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}c\mathbf{d}x=\frac{1}{\pi}2c\pi=2c.$$

אבל $c\sim\frac{a_{0}}{2}=\frac{2c}{2}=c$ כנדרש. ■

2. פיתוח פורייה היא אופרטור לינארי. כלמר $F\left(\alpha f+\beta g\right)=\alpha F\left(f\right)+\beta F\left(g\right)$. על מנת לראות זאת, צריך פשוט לשים לב שינטגרל הוא אופרטור לינארי ולכן:

$$\begin{aligned}\left\langle \alpha f+\beta g,h\right\rangle &=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\left(\alpha f\left(x\right)+\beta g\left(x\right)\right)h\left(x\right)\mathbf{d}x=\\ &=\alpha\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f\left(x\right)h\left(x\right)\mathbf{d}x+\beta\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}g\left(x\right)h\left(x\right)\mathbf{d}x=\alpha\left\langle f,h\right\rangle +\beta\left\langle g,h\right\rangle \end{aligned}$$

אבל

$$\begin{aligned}F\left(\alpha f+\beta g\right)&=\frac{\left\langle \alpha f+\beta g,1\right\rangle }{2}+\sum_{n=1}^{\infty}\left\langle \alpha f+\beta g,\cos nx\right\rangle \cos nx+\left\langle \alpha f+\beta g,\sin nx\right\rangle \sin nx\\ &=\alpha\frac{\left\langle f,1\right\rangle }{2}+\beta\frac{\left\langle \beta,1\right\rangle }{2}+\sum_{n=1}^{\infty}\alpha\left\langle f,\cos nx\right\rangle \cos nx+\beta\left\langle g,\cos nx\right\rangle \cos nx\\ &+\sum_{n=1}^{\infty}\alpha\left\langle f,\sin nx\right\rangle \sin nx+\beta\left\langle g,\sin nx\right\rangle \sin nx\\ &=\alpha\frac{\left\langle f,1\right\rangle }{2}+\beta\frac{\left\langle g,1\right\rangle }{2}+\alpha\sum_{n=1}^{\infty}\left\langle f,\cos nx\right\rangle \cos nx+\beta\sum_{n=1}^{\infty}\left\langle g,\cos nx\right\rangle \cos nx\\ &+\alpha\sum_{n=1}^{\infty}\left\langle f,\sin nx\right\rangle \sin nx+\beta\sum_{n=1}^{\infty}\left\langle g,\sin nx\right\rangle \sin nx\\ &=\alpha\left(\frac{\left\langle f,1\right\rangle }{2}+\sum_{n=1}^{\infty}\left\langle f,\cos nx\right\rangle \cos nx+\left\langle f,\sin nx\right\rangle \sin nx\right)\\ &+\beta\left(\frac{\left\langle g,1\right\rangle }{2}+\sum_{n=1}^{\infty}\left\langle g,\cos nx\right\rangle \cos nx+\left\langle g,\sin nx\right\rangle \sin nx\right)\\ &=\alpha F\left(f\right)+\beta F\left(g\right)\end{aligned}$$

3. נאמר ש $f(x)$ היא פולינום טריגונומטרי אם היא פולינום בביטויים מהצורה $\sin nx, \cos mx$ עבור m ו n שלמים. לדוגמא,

$$(\sin 4x)^3 \cos 2x + \cos^5 19x$$

הוא פולימום טריגונומטרי. זה נובע מהזויות הבאות:

$$\cos mx \cos nx = \frac{1}{2}(\cos(m+n)x + cos(m-n)x)$$
$$\sin mx \sin nx = \frac{1}{2}(\cos(m-n)x - \cos(m+n)x)$$
$$.\cos mx \sin nx = \frac{1}{2}(\sin(m+n)x + \sin(m-n)x)$$

בעזרת זהויות הללו, ניתן להפוך כל ביטוי שהוא מכפלה של סינוסים וקוסינוסים לצירוף לינארי של $\sin nx$ ו$\cos mx$.
דרך נוספת להעביר לייצג פולינום טריגונומטרי כצירוף לינארי של $\cos mx$ ו $\sin nx$ היא להשתמש בזהות מהמרוכבים:

$$\sin x = \frac{e^{ix} - e^{-ix}}{2i}$$
$$.\cos x = \frac{e^{ix} + e^{-ix}}{2}$$

(הדרך השניה פשוטה יותר).

דוגמא 2.2 בטאו את הפולינום הטריגונומטרי

$$f(x) = \sin^3 3x + \cos 2x \cos 3x \sin 2x$$

כצירוף לינארי של $\cos nx$ ו $\sin mx$.

מסקנה 2.3 פתרון:

$$\begin{aligned} sin^3 3x &= \left(\frac{e^{3ix} - e^{-3ix}}{2i}\right)^3 = -\frac{1}{8i}\left(e^{9ix} - 3e^{3ix} + 3e^{-3ix} - e^{-9ix}\right) \\ &= -\frac{1}{4}\left(\frac{e^{9ix} - e^{-9ix}}{2i} - \frac{e^{3ix} - e^{-3ix}}{2i}\right) \\ &= -\frac{1}{4}(\sin 9x - \sin 3x) = \frac{\sin 3x}{4} - \frac{\sin 9x}{4} \end{aligned}$$

באופן דומה

$$\begin{aligned} \cos 2x \cos 3x \sin 2x &= \left(\frac{e^{2ix} + e^{-2ix}}{2}\right)\left(\frac{e^{3ix} - e^{-3ix}}{2}\right)\left(\frac{e^{2ix} - e^{-2ix}}{2i}\right) \\ &= \left(\frac{e^{4ix} - e^{-4ix}}{4i}\right)\left(\frac{e^{3ix} + e^{-3ix}}{2}\right) \\ &= \frac{1}{8i}\left(e^{7ix} + e^{ix} - e^{-ix} - e^{-7ix}\right) \\ &= \frac{1}{4}\left(\frac{e^{7ix} - e^{-7ix}}{2i} + \frac{e^{ix} - e^{-ix}}{2i}\right) \\ &= \frac{1}{4}\sin 7x + \sin x \end{aligned}$$

נחבר את התוצאות ונקבל את הדרוש.

$$\sin^3 3x + \cos 2x \cos 3x \sin 2x = \frac{1}{4}\sin x + \frac{1}{4}\sin 3x + \frac{1}{4}\sin 7x - \frac{1}{9}\sin 9x .$$

בנוסף, כל לבדוק בעזרת חישוב האינטגרל שמתקיים לכל שלמים $0 < n, m$:

$$\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \sin^2 nx = 1$$

$$\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \cos^2 nx = 1$$

$$\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \cos nx \sin mx = 0$$

כמו כן, עבור $m \neq n$ שלמים מתקיים

$$\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \sin mx \sin nx = \frac{1}{\pi}\int_{\pi}^{\pi} \cos mx \cos nx = 0 .$$

ולכן אם $f = \sin mx$ או $f = \cos nx$ כל המקדמים בפיתוח פורייה של f (דהיינו, a_n ו b_n) מתאפסים פרט למקדם ש f ששווה ל 1 ולכן פיתוח פורייה של f שווה לעצמו.

מתכונת הלינאריות ומהעובדה שכל פולינום טריגונומטרי p אפשר להציג כצירוף לינארי של $1, \sin nx, \cos mx$ נובע שפיתוח פורייה של p שווה לp.

4. אם f פונקציה זוגית, אזי הפיתוח שלה הוא טור קוסינוסים, כלמר מהצורה

$$f \sim \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos nx .$$

הוכחה: נראה ש $b_n = 0$ לכל n טבעי.

$$b_n = \langle f, \sin nx \rangle = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x) \sin nx \mathbf{d}x = 0 .$$

המעבר האחרון נובע מהעובד ש אם g היא פונקציה אי־זוגית אזי $\int_{-a}^{a} g(x) \mathbf{d}x = 0$ לכל a ושמכפלה של פונקציה זוגית ואי־זוגית (במקרה שלנו f ו $\sin nx$) היא פונקציה אי זוגית, זאת אומרת ש $f(x) \sin nx$ אי־זוגית. ∎

5. אם f פונקציה אי־זוגית, אזי הפיתוח שלה הוא טור סינוסים, כלמר מהצורה

$$f \sim \sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin nx .$$

זה נובע מהעובדה ש $\cos nx$ו 1 הן פונקציות זוגיות, ומכפלה של פונקציה זוגית ואי זוגית היא אי־זוגית ולכן $f \cos nx$ היא שוב פונקציה אי־זוגית ולכן a_n מתאפס לכל n מתאפס בפיתוח.

2.2 חישוב דוגמאות

דוגמא 2.4 מצאו את הפיתוח פורייה של x.

פתרון: מתכונה של אי־זוגיות הפיתוח של x הוא מהצורה $x \sim \sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin nx$ ולכן מספיק למצוא רק את המקדמים של $\sin nx$.

$$\begin{aligned} b_n = \langle x, \sin nx \rangle &= \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} x \sin nx \mathbf{dx} \\ &= \frac{1}{\pi} \left(-\frac{1}{n} x \cos nx \Big|_{-\pi}^{\pi} + \int_{-\pi}^{\pi} \cos nx \mathbf{d}x \right) \\ &= \frac{1}{\pi} \left(\frac{(-1)^{n+1} 2\pi}{n} + 0 \right) \\ &= \frac{(-1)^{n+1} 2}{n} \end{aligned}$$

הפיתוח הסופי הינו

$$x \sim \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{2}{n} \sin nx.$$

דוגמא 2.5 מצאו את הפיתוח פורייה של $|x|$.

פתרון: מהתכונה של זוגיות הפיתוח הוא מהצורה $|x| \sim \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos nx$. על מנת להקל על החישוב נשתמש בתכונה הבאה של פונקציה זוגית: אם f פונקציה זוגית אזי

$$\int_{-a}^{a} f(x) \mathbf{d}x = 0.$$

מהנוסחה נקבל

$$\begin{aligned} a_0 = \langle |x|, 1 \rangle &= \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} |x| \mathbf{d}x = \frac{2}{\pi} \int_{0}^{\pi} |x| \mathbf{d}x = \frac{2}{\pi} \int_{0}^{\pi} x \mathbf{d}x \\ &= \frac{2}{\pi} \frac{x^2}{2} \Big|_0^{\pi} = \frac{2}{\pi} \frac{\pi^2}{2} = \pi \\ a_n = \langle |x|, \cos nx \rangle &= \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} |x| \cos nx \mathbf{d}x = \frac{2}{\pi} \int_{0}^{\pi} |x| \cos nx \mathbf{d}x \\ &= \frac{2}{\pi} \int_{0}^{\pi} x \cos nx \mathbf{d}x = \frac{2}{\pi} \left(\frac{x \sin nx}{n} \Big|_0^{\pi} - \frac{1}{n} \int_0^{\pi} \sin nx \mathbf{d}x \right) \\ &= \frac{2}{\pi} \left(\frac{1}{n^2} \cos nx \Big|_0^{\pi} \right) = \frac{2}{\pi} \left(\frac{(-1)^n - 1}{n^2} \right) = \begin{cases} 0 & n\, is\, even \\ -\frac{4}{\pi n^2} & n\, is\, odd \end{cases} \end{aligned}$$

נשים לב שבפיתוח מופיעים רק $\cos nx$ עבור n אי זוגי. ולכן אפשר לרשום את הטור באופן הבא:

$$|x| \sim \frac{\pi}{2} + \sum_{n=0}^{\infty} -\frac{4}{\pi (2n+1)^2} \cos (2n+1) x$$

הערה 2.6 אם נפתח את הביטוי עוד קצת נקבל

$$|x| \sim \frac{\pi}{2} - \frac{4}{\pi} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(2n+1)^2} \cos(2n+1)x .$$

אם לשניה נניח שהטור פורייה שקיבלנו מתכנס נקודתית לפונקצה (בהמשך נראה תנאים מדוייקים בהם זה קורה...) עצמה בקטע $[-\pi, \pi]$אם נציב 0 במקום x נקבל

$$0 = \frac{\pi}{2} - \frac{4}{\pi} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(2n+1)^2}$$

$$\Updownarrow$$

$$\frac{\pi^2}{8} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(2n+1)^2} .$$

דוגמא 2.7 חשבו את הפיתוח פורייה של x^2. שוב מהתכונה הקודמת, יש לנו טור קוסינוסים. (הפיתוח הוא בעל צורה $x^2 \sim \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos nx$).

$$\begin{aligned}
a_0 &= \left\langle x^2, 1 \right\rangle = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} x^2 \mathbf{d}x = \frac{1}{\pi} \frac{x^3}{3} \bigg|_{-\pi}^{\pi} = \frac{2\pi^2}{3} \\
a_n &= \left\langle x^2, \cos nx \right\rangle = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} x^2 \cos nx \mathbf{d}x = \frac{1}{\pi} \left(\frac{x^2 \sin nx}{n} \bigg|_{-\pi}^{\pi} - \frac{1}{n} \int_{-\pi}^{\pi} 2x \sin nx \mathbf{d}x \right) \\
&= \frac{1}{\pi} \left(-\frac{1}{n} \int_{-\pi}^{\pi} 2x \sin nx \mathbf{d}x \right) = \frac{1}{\pi} \left(\frac{2x \cos nx}{n^2} \bigg|_{-\pi}^{\pi} - \frac{2}{n^2} \int_{-\pi}^{\pi} \sin nx \mathbf{d}x \right) \\
&= \frac{1}{\pi} \left(\frac{(-1)^n}{n^2} 4\pi \right) = \frac{4(-1)^n}{n^2}
\end{aligned}$$

הפיתוח הסופי הוא

$$x^2 \sim \frac{\pi^2}{3} + \sum_{n=1}^{\infty} 4 \frac{(-1)^n}{n^2} \cos nx .$$

דוגמא 2.8 חשבו את הפיתוח פורייה של $x(x+1)$.

פתרון: $x(x+1) = x^2 + x$. את הפיתוח של x^2 ו x כבר חישבנו. נשתמש בלינאריות של פיתוח פורייה ונקבל

$$\begin{aligned}
F\left[x^2 + x\right] &= F\left[x^2\right] + F[x] = \left(\frac{\pi^2}{3} + \sum_{n=1}^{\infty} 4 \frac{(-1)^n}{n^2} \cos nx \right) + \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{2}{n} \sin nx \\
&= \frac{\pi^2}{3} + \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{4}{n^2} \cos nx + (-1)^{n+1} \frac{2}{n} \sin nx
\end{aligned}$$

דוגמא 2.9 מצאו את הפיתוח פורייה של $f\left(x\right)=\begin{cases} 0 & x\leq a\\ 1 & x>a \end{cases}$ בקטע $\left[-\pi,\pi\right]$ עבור $0\leq a\leq1$

פתרון: נמצא את המקדמי פורייה

$$a_{0}=\left\langle f,1\right\rangle \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f\left(x\right)\mathbf{d}x=\frac{1}{\pi}\int_{a}^{\pi}1\mathbf{d}x=x\Big|_{a}^{\pi}=\pi-a$$
$$a_{n}=\left\langle f,\cos nx\right\rangle =\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f\left(x\right)\mathbf{d}x=\frac{1}{\pi}\int_{a}^{\pi}\cos nx\mathbf{d}x=\frac{1}{\pi}\frac{1}{n}\sin nx\Big|_{a}^{\pi}=-\frac{\sin na}{\pi n}$$
$$b_{n}=\left\langle f,\sin nx\right\rangle =\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f\left(x\right)\mathbf{d}x=\frac{1}{\pi}\int_{a}^{\pi}\sin nx\mathbf{d}x=-\frac{1}{\pi}\frac{1}{\pi}\cos nx\Big|_{a}^{\pi}=\frac{\cos na-\left(-1\right)^{n}}{\pi n}$$

הטור הסופי שמתקבל הינו

$$.f\left(x\right)\sim\pi-a+\sum_{n=1}^{\infty}-\frac{\sin na}{\pi n}\cos na+\frac{\cos na+\left(-1\right)^{n+1}}{\pi n}\sin na$$