דף תרגילים 5

1. תהי $x:U\rightarrow R^3$ פרמטריזציה של משטח כלשהו ותהי g התבנית היסודית הראשונה. כתבו את הביטוי הבא בעזרת סמלי גאמא, וללא סימוני איינשטיין: $\left\langle x_{ij},x_m\right\rangle \delta^i{}_k g^{mk}$.

2. משטח $S\subset R^3$ מוגדר ע"י: $S=\left\{(x,y,z)\in R^3 : x^2+z^2=9\right\}$

א. תארו (במילים ובאמצעות שרטוט) את צורתו הגיאומטרית של המשטח.

ב. מצאו פרמטרזציה של המשטח בעזרת הצגתו כאיחוד של גרפים של פונקציות

ג. מצאו פרמטרזציה אחרת של המשטח.

ד. המישורים $x=1$ ו- $y=1$ חותכים את המשטח S לאורך עקומות γ_1 ו- γ_2. מהי העקמומיות של העקומות הנ"ל?

ה. מצאו את התבנית היסודית הראשונה של שתי הפרמטריזציות מסעיפים ב' וג'.

ו. חשבו את אורך העקומה γ_2 בעזרת סעיף ה'.

3. תהי $\gamma(t)=\left(f(t),0,g(t)\right),\gamma:[t_1,t_2]\rightarrow R^3$ עקומה הנתונה בפרמטריזציית יחידה.

א. הביעו את שטח משטח הסיבוב של γ בעזרת f.

ב. ידוע כעת ש γ היא מעגל ברדיוס β, וכן ידוע שמרכזו נמצא במרחק α **מציר** ה z. חשבו את השטח במפורש.

הערה: ניתן לחשב שטח משטח בעזרת התבנית היסודית הראשונה, ראו סעיף 6.11 בחוברת הקורס לפרטים המלאים.

4. נתונה עקומה **מישורית** רגולרית ופשוטה $\gamma:[t_1,t_2]\rightarrow R^2$. נגדיר את הגליל מעל γ כך:

$$X(t,\mathrm{v})=\left(\gamma^1(t),\gamma^2(t),v\right)$$

א. חשבו את התבנית היסודית הראשונה של X.

ב. מצאו פרמטריזציה של המשטח X כך שהתבנית היסודית הראשונה שלו זהה לתבנית היסודית הראשונה של המישור - $Y(u,v)=(u,v,0)$.

5. יהיו שני משטחים בעלי תבניות יסודיות ראשונות, G_1,G_2. ידוע כי סמלי גאמא של התבניות זהים. האם בהכרח גם התבניות זהות?

6. נתונה פרמטריציה של משטח, $X(u,v)$ עבור $(u,v)\in(0,\infty)\times(0,\infty)$ וידוע כי התבנית היסודית הראשונה היא $G(u,v)=\begin{pmatrix}1/v^2 & 0\\ 0 & 1/v^2\end{pmatrix}$. מצאו את סמלי גאמא של פרמטריזציה זו.