תרגיל 8

1) הוכיחו כי:

$$\int_0^1 \frac{(n\cos x)}{1+n^2x^{3/2}}\,dm \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$$

2) יהי (Ω,S,μ) מ"מ
ותהי $f:\Omega\to[0,\infty]$ מדידה כך ש: $0<c:=\int_\Omega f\,d\mu<\infty$,
יהי $0<a<\infty$.

הוכיחו כי:

$$\lim_{n\to\infty}\int_\Omega n\log\left(1+\left(\frac{f}{n}\right)^a\right)d\mu=\begin{cases} c & a=1 \text{ אם} \\ \infty & 0<a<1 \text{ אם} \\ 0 & 1<a<\infty \text{ אם}\end{cases}$$

זכרו כי אם $0\le t$, $1\le a$ אזי $1+t^a\le(1+t)^a\le e^{at}$

3) תהי $\{f_n\}$ סדרת פונקציות מדידות אי שליליות מעל מרחב מידה (Ω,S,μ)
הוכיחו: אם $f_1\ge f_2\ge\dots$ ונניח, ו: $f_n\xrightarrow[(n\to\infty)]{} f$
וגם $\int_\Omega f_{2^{53}}\,d\mu<\infty$ אזי: $\int_\Omega f_n\,d\mu\to\int_\Omega f\,d\mu$

4) חשבו את האינטגרלים הבאים:

א) $\int_{[0,1]} x^2\,d\mu_F$ כש- F היא פונקציית קנטור.

ב) $\int_{(-\infty,0]} f\,d\mu_F$ כש-f פונקציה רציפה ו:

$$F(x)=\begin{cases}3 & x=0\\ 2 & \text{אחרת}\end{cases}$$

תזכורת: μ_F הינה מידת סטילטיס המתאימה לפונקציה F.