תירגול 6

23 בנובמבר 2015

הגדרה־ הרכבה\כפל של היחסים $R\subseteq A\times B$ ו־$S,T\subseteq B\times C$ הוא:

$$RS=\{(x,z)\mid \exists y\in B,(x,y)\in R\wedge(y,z)\in S\}$$

1. הוכח או הפרך:
   א. $RS=ST\to S=T$?
   ב. $RS=SR$?
   ג. $T\subseteq S\to RT\subseteq RS$? פתרון:

   א. כמובן שלא דוגמה נגדית $A=\{1,2\}$ ניקח יחסים R,S מעל A, $R=T=\{(1,1)\},S=\{(1,1),(2,2)\}$.

   ב. כמובן שלא אם $R\subseteq A\times B$, $S\subseteq B\times A$ אז $RS\subseteq A\times A$ ו־ $SR\subseteq B\times B$.

   ג. הוכחה, יהי $(x,z)\in RT$ לפי ההגדרה קיים $y\in B$ המקיים $(x,y)\in R$ וגם $(y,z)\in T$ אולם $T\subseteq S$ ולכן $(y,z)\in S$ ולכן $(x,z)\in RS$

2. יהיו $S,T\subseteq B\times C$ ו־ $R\subseteq A\times B$.
   א. הוכיחו כי: $R(S\cap T)\subseteq RS\cap RT$
   ב. הבא דוגמה בה אין שויון.
   פתרון:
   א. יהי $(a,c)\in R(S\cap T)$ אזי מתקיים:

$$\begin{array}{rcl}
(a,c) & \in & R(S\cap T)\\
 & \Updownarrow & \\
\exists b\in B,(a,b)\in R & \wedge & (b,c)\in(S\cap T)\\
 & \Updownarrow & \\
\exists b\in B,(a,b)\in R & \wedge & (b,c)\in S\wedge(b,c)\in T\\
 & \Updownarrow & \\
\exists b\in B,(a,b)\in R\wedge(b,c)\in S & \wedge & (a,b)\in R\wedge(b,c)\in T\\
 & \Downarrow & \\
(a,c)\in RS & \wedge & (a,c)\in RT\\
 & \Updownarrow & \\
(a,c) & \in & RS\cap RT
\end{array}$$

ב. $A = B = C = \{1,2\}$ $R = \{(1,1),(1,2)\}, T = \{(1,1)\}, S = \{(2,1)\}$
מתקיים: $R \cap S = \phi$ ולכן $R(S \cap T) = \phi$ אולם $RT = RS = \{(1,1)\}$.

3. יהי R יחס רפלקסיבי מעל A, הוכיחו כי לכל n מתקיים $R \subseteq R^2 \subseteq \cdots \subseteq R^n$.

פתרון:

$I_A \subseteq R \Rightarrow I_A R^n = R \subseteq RR^n = R^{n+1}$ (מתבסס על שאלה 1 סעיף ג)