פתרון מבחן אלגברה לינארית 2

קווין מנדלבאום

מועד א סמסטר א תשפ"א

שאלה 1

סעיף א

תהי $A\in \mathbb{C}^{5\times 5}$ מטריצה כך שלכל $\imath,\jmath \in [I]$ מתקיים כי $[A]_{\imath,\jmath} \in \mathbb{R}$. כמו כן, מתקיים כי $rank(A) = 3$ וכי $A^4 = -A^2$.

מצאו את כל צורות הזורדן האפשריות של A.

פתרון

נתחיל מהנתון כי $A^4 = -A^2$.

$$A^4 + A^2 = 0 \implies A^2(A^2 + I) = 0 \implies f(x) = x^2(x^2 + 1) = x^2(x + i)(x - i)$$

f פולינום מאפס של A.

מההרצאה, מתקיים כי: $m_A(x) \mid f(x)$

נשים לב כי $m_A(x) \neq x$ כי אחרת $rank(A) = 5$ בסתירה לנתון. (כלומר $A \neq 0$)

מהנתון כי $rank(A) = 3$, נקבל ממשפט הדרגה כי $\dim N(A) = 2$, וזה בדיוק הריבוי הגיאומטרי של הערך העצמי 0, קרי $g(0)$

הפולינום המינימלי

$$m_A(x) \in \{x^2(x + i)(x - i), x(x + i)(x - i), x^2\}$$

זאת משום שנשים לב כי $p_A(x) \in \mathbb{R}[x]$ (נתון כי כל רכיבי A ממשיים). ידוע כי אם $z \in \mathbb{C}$ מאפס פולינום ממשי אזי גם $\bar{z} \in \mathbb{C}$ מאפס את הפולינום. כלומר, אם i שורש של הפולינום המינימלי, גם $-i$ שורש.

לכן, או ששניהם שורש של הפולינום המינימלי או שאף אחד מהם.

נשים לב כי $m_A(x) \neq x^2$ זאת משום שהריבוי הגיאומטרי של הערך העצמי 0 היא 2 תמיד, כלומר לאפס יש שני בלוקים בלבד בצורת הזורדן. אך החזקה בפולינום המינימלי היא 2, כלומר גודל הבלוק המקסימלי הוא 2. ולכן נקבל כי צורת הזורדן מכילה 4 בלוקים, בסתירה לכך ש$A \in \mathbb{C}^{5\times 5}$.

נותרנו עם שתי אפשרויות, $m_A(x) = x^2(x+i)(x-i), x(x+i)(x-i)$.

אם $m_A(x) = x(x+i)(x-i)$, אז A לכסינה ונקבל כי צורת הזורדן שלה שווה לצורה האלכסונית שלה, קרי:

$$\begin{pmatrix} 0 & & & & \\ & 0 & & & \\ & & i & & \\ & & & -i & \\ & & & & ? \end{pmatrix}$$

נשים לב כי לא ייתכן כי יש לA ע"ע נוסף, כלומר או i או $-i$ שווים ל$?$.

אך, נזכיר כי למטריצות דומות יש עקבה שווה, והעקבה של A ממשית, ולכן הריבויים של i ו־$-i$ צריכים להיות זהים (כדי לאפס ולשמור על עקבה ממשית). לכן זה לא ייתכן.

נותרנו עם פולינום מינימלי יחיד, $m_A(x) = x^2(x+i)(x-i)$.

צורת הזורדן במקרה זה היא

$$J(A) = \begin{pmatrix} 0 & 1 & & & \\ 0 & 0 & & & \\ & & 0 & & \\ & & & i & \\ & & & & -i \end{pmatrix}$$

מספר הבלוקים הוא 2 (הריבוי הגיאומטרי של 0 הוא 2). מכיוון שהחזקה בפולינום המינימלי היא 2 הבלוק המקסימלי הוא מגודל 2. נשלים בהתאם לפי התנאי שהריבויים של $\pm i$ זהים ונקבל צורת זורדן יחידה.

$$\boxed{J(A)=\begin{pmatrix} 0 & 1 & & & \\ 0 & 0 & & & \\ & & 0 & & \\ & & & i & \\ & & & & -i \end{pmatrix}}$$

כנדרש $\square$

סעיף ב

קבעו האם המטריצה להלן לכסינה. נמקו.

$$A=\begin{pmatrix} 1&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0\\ 0&1&1&0&0&0&0&0&0&0&0&0\\ 0&0&2&0&0&0&0&0&0&0&0&0\\ 0&0&0&2&1&0&0&0&0&0&0&0\\ 0&0&0&0&3&0&0&0&0&0&0&0\\ 0&0&0&0&0&3&1&0&0&0&0&0\\ 0&0&0&0&0&0&4&0&0&0&0&0\\ 0&0&0&0&0&0&0&4&1&0&0&0\\ 0&0&0&0&0&0&0&0&5&0&0&0\\ 0&0&0&0&0&0&0&0&0&5&1&0\\ 0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&6&0\\ 0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&6 \end{pmatrix}$$

פתרון

נשים לב כי A הינה מטריצה אלכסונית בלוקים. למדנו כי הפולינום המינימלי של מטריצה אלכסונית בלוקים הוא ה־lcm של כל הפולינומים המינימליים של הבלוקים. נחשב אותו:

הבלוקים הקיימים:

$$(1) \to m(x) = x - 1$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} \to m(x) = (x-1)(x-2)$$

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 3 \end{pmatrix} \to m(x) = (x-2)(x-3)$$

$$\begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 0 & 4 \end{pmatrix} \to m(x) = (x-3)(x-4)$$

וכן הלאה....

בסה"כ נקבל כי $m_A(x) = lcm(m_i(x)) = (x-1)(x-2)(x-3)(x-4)(x-5)(x-6)$

קיבלנו פולינום מינימלי שמתפרק לגורמים לינארים **שונים**, ולפי משפט, המטריצה A אכן לכסינה.

כנדרש $\square$

שאלה 2

יהי $V = \mathbb{R}^{2\times 2}$ מרחב המטריצות הממשיות מגודל 2×2 עם המכפלה הפנימית של פרובניוס, $\langle A, B\rangle = tr(A^T B)$

יהי $T : V \to V$ אופרטור המוגדר באופן הבא:

$$T(A) = A^T$$

א. הוכיחו כי T צל"ע

ב. יהיו

$$A_1 = \begin{pmatrix} 0.5 & 0.5 \\ 0.5 & 0.5 \end{pmatrix}, A_2 = \begin{pmatrix} -0.5 & 0.5 \\ 0.5 & -0.5 \end{pmatrix}$$

השלימו את $\{A_1, A_2\}$ לבסיס אורתוגונלי שמלכסן את T

ג. הוכיחו כי T אוניטרית

<u>פתרון</u>

לשאלה זו יש 2 דרכים אפשריות לפתרון. שתיהן נכונות, אראה כאן את הפתרון עם המטריצה המייצגת, אך גם פתרונות של מכפלה פנימית יתקבלו.

על מנת להוכיח כי מדובר באופרטור צל"ע, קרי $T = T^*$, נבנה מטריצה מייצגת, ונוכיח כי היא סימטרית.

יהי E הבסיס הסטנדרטי, (שימו לב כי הוא אורתונורמלי), נבנה מטריצה מייצגת:

$$T(\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$T(\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}) = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$T(\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$T(\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}) = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

ואכן נקבל כי

$$[T]_E = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

מכיוון שE אורתונורמלי, $[T^*]_E = [T]_E^*$ ונקבל כי $[T]_E = [T^*]_E$, קרי, T צמודה לעצמה.

ב.

נשים לב כי שתי המטריצות הנ"ל הינן סימטרית, כלומר, תחת ההעתקה T לא יבוצע בהן שינוי, כלומר, שתי המטריצות הינן ווקטורים עצמיים של T עבור הערך העצמי 1.

נשים לב כי מכיוון שT צמודה לעצמה, היא לכסינה אורתוגונלית.

ניתן להתייחס למטריצה כמטריצה אלכסונית בלוקים, ולחשב:

$$lcm(x-1, (x-1)(x+1), (x-1)) = (x-1)(x+1) = m_A(x)$$

כלומר יש גם ערך עצמי מינוס 1, כלומר מטריצה שהמשוחלפת שלה נותנת את מינוס עצמה, כלומר מטריצה אנטי סימטרית.

ידוע כי ב$\mathbb{R}^{2\times 2}$ צורה של כל מטריצה אנטי־סימטרית היא

$$\begin{pmatrix} 0 & a \\ -a & 0 \end{pmatrix}$$

לכן ניקח

$$\begin{pmatrix} 0 & 0.5 \\ -0.5 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & -0.5 \\ 0.5 & 0 \end{pmatrix}$$

נשים לב כי הבסיס $\left\{ \begin{pmatrix} 0.5 & 0.5 \\ 0.5 & 0.5 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -0.5 & 0.5 \\ 0.5 & -0.5 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & -0.5 \\ 0.5 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0.5 \\ -0.5 & 0 \end{pmatrix} \right\}$
הינו אורתוגונלי. (קל לבדוק בעזרת מכפלות פנימיות)

כמו כן, הווקטורים הנ"ל הינם ווקטורים עצמיים של A ולכן מלכסנים אותה אורתוגונלית.

ג. צ"ל שT אוניטרי.

הוכחנו כי $T = T^*$, לכן זה שקול להוכיח כי $T^2 = I$

תהי $B \in \mathbb{R}^{2\times 2}$. אזי

$$T^2(B) = T(T(B)) = T(B^T) = (B^T)^T = B$$

מש"ל.

שאלה 3

סעיף א

יהי V ממ"פ ויהיו $W_1, W_2 \leq V$ כך ש$V = W_1 \oplus W_2$. צ"ל כי $V = W_1^\perp \oplus W_2^\perp$.

<u>פתרון</u>

ראשית נוכיח כי $\dim V = \dim W_1^\perp + \dim W_2^\perp$.

מהנתון כי $V = W_1 \oplus W_2$, נקבל כי $\dim V = \dim W_1 + \dim W_2$.

ממשפטי הפירוק הניצב, נקבל כי $\dim V - \dim W_1 = \dim W_1^\perp$ וכנל עבור $W_2^\perp$.

לאחר הצבה, נקבל כי $\dim W_1^\perp = \dim W_2$ וכי $\dim W_1 = \dim W_2^\perp$. כלומר $\dim V = \dim W_1^\perp + \dim W_2^\perp$.

כעת נראה כי $W_1^\perp \cap W_2^\perp = \{\vec{0}\}$.

יהי $v \in W_1^\perp \cap W_2^\perp$. נוכיח כי $v = 0$

$v \in W_1^\perp \iff$ לכן, לכל $w_1 \in W_1$ מתקיים כי $\langle v, w_1 \rangle = 0$

$v \in W_2^{\perp} \Longleftarrow$ לכן, לכל $w_2 \in W_2$ מתקיים כי $\langle v, w_2 \rangle = 0$

לכן,

$$\langle v, w_1 \rangle + \langle v, w_2 \rangle = 0 \iff \langle v, w_1 + w_2 \rangle = 0$$

מכיוון ש$V = W_1 \oplus W_2$, לכל $v \in V$ ניתן לכתוב אותו כ $v = w_1 + w_2$. ולכן

$$\langle v, v \rangle = 0$$

מאי שליליות המכפלה הפנימית, נקבל כי $v = 0$ בהכרח.

הוכחנו כי החיתוך הוא אפס וכי המימדים שווים, ולכן $V = W_1^{\perp} \oplus W_2^{\perp}$.

סעיף ב־

הוכיחו או הפריכו: אם $W_1 \cap W_2 \neq \{0\}$ אזי $W_1^o \cap W_2^o \neq \{0\}$.

<u>הפרכה</u>

נבחר $W_1 = W_2 = V$.

כמובן כי $W_1 \cap W_2 \neq \{0\}$. מכיוון שW_1 וW_2 הם המרחב עצמו, הפונקציוניל היחיד שמאפס אותם הוא פונקציונל האפס. משמע

$$W_1^o \cap W_2^o = \{0\} \cap \{0\} = \{0\}$$

וזו הפרכה.