פתרון 3:

1) א. תהי $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$ סדרת קושי במרחב. כלומר, לכל $\epsilon > 0$ קיים N כך שלכל $N < n, m$ מתקיים: $\sup_{x\in[a,b]}|f_n(x) - f_m(x)| < \epsilon$.
לכל $x_0 \in [a,b]$ $|f_n(x_0) - f_m(x_0)| \le \sup_{x\in[a,b]}|f_n(x) - f_m(x)| < \epsilon$
ולכן $\{f_n(x_0)\}_{n=1}^{\infty}$ סדרת קושי ב- $\mathbb{R}$, ולכן היא מתכנסת למספר שנקרא לו $f(x)$.

סדרות הפונקציות $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$ מתכנסת נקודדתית ל- f. נוכיח שזו למעשה התכנסות בנורמה:
לכל $\epsilon > 0$ יש גם N כך שלכל $N < m, n$ מתקיים: $\sup_{x\in[a,b]}|f_n(x) - f_m(x)| < \epsilon$.
וגם $n_{x_0} > N$ עבורו $\left|f_{n_{x_0}}(x_0) - f(x_0)\right|$. בפרט

$$|f_n(x_0) - f(x_0)| \le \left|f_n(x_0) - f_{n_{x_0}}(x_0)\right| + \left|f_{n_{x_0}}(x_0) - f(x_0)\right| < 2\epsilon$$

בפרט $\|f_n - f\| = \sup_{x\in[a,b]}|f_n(x) - f(x)| < 2\epsilon$ לכל $N < n$.

נשאר להראות ש- f רציפה (אנחנו במרחב הפונק' הרציפות). למדנו את זה באינפי 1 - "אם סדרת פונק' רציפות מתכנסת במ"ש לפונקצית גבול אז גם היא רציפה.".

ב. תהי $\{(x_m^n)_m\}_{n=1}^{\infty}$ סדרת קושי. לכן, לכל m קבוע הסדרה $\{x_m^n\}_{n=1}^{\infty}$ היא סדרת קושי, ולפי השלמות של $\mathbb{R}$ קיים לה גבול: $\lim_{n\to\infty} x_m^n = x_m$. נביט בסדרה $(x_m)_{m=1}^{\infty}$, ואז: $\sum_1^k |x_m|^2 = \lim_{n\to\infty}\sum_1^k |x_m^n|^2 \le \sup\|(x_m^n)_m\|_2^2 < M < \infty$ עבור $M > 0$ כלשהו בגלל שסדרת קושי חייבת להיות חסומה. נובע ש- $\sum_1^{\infty}|x_m|^2 < \infty$ ולכן $(x_m)_{m=1}^{\infty} \in l_2$.

לפי ההגדרה $\|(x_m^l)_m - (x_m^n)_m\|_2 = \sqrt{\sum_1^{\infty}\left|x_m^l\right|^2 - \sum_1^{\infty}|x_m^n|^2} < \epsilon$ עבור n, l גדולים מספיק. נשאיף $l \to \infty$ ונקבל $\|(x_m)_m - (x_m^n)_m\|_2 = \sqrt{\sum_1^{\infty}|x_m|^2 - \sum_1^{\infty}|x_m^n|^2} \le \epsilon$ ולכן הסדרה $\{(x_m^n)_m\}_{n=1}^{\infty}$ מתכנסת ל- $(x_m)_m$. לכן המרחב שלם.

2) א. $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)}\frac{\sin(xy)}{x} = \lim\limits_{(x,y)\to(0,0)}\frac{\sin(xy)}{xy}y = \lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} 1\cdot y = 0$

ב. $0 \leftarrow |y| = \left|\frac{xy}{\sqrt{x^2}}\right| \ge \left|\frac{xy}{\sqrt{x^2+3y^2}}\right| \ge 0$ ולכן לפי סנדוויץ' הגבול הוא 0.

ג. נציב: $t = x^2 + y^2 + 1$ ונקבל: $\lim\limits_{t\to1}\frac{\sqrt{t}-1}{t-1} = \lim\limits_{t\to1}\frac{1}{\sqrt{t}+1} = \frac{1}{2}$

3)

א. נניח ש- $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ סדרת קושי, $\{n_k\}_{k=1}^{\infty}$ סדרת מספרים ששואפת ל- ∞ ו- $\{x_{n_k}\}_{k=1}^{\infty}$ מתכנסת ל- x. לכל $\epsilon > 0$ קיים N כך שלכל $N < n, m$ מתקיים $d(x_n, x_m) < \epsilon$.
בנוסף ישנו k עבורו $N < n_k$ ו- $d(x_{n_k}, x) < \epsilon$. ולכן לכל $N < n$

$$d(x_n, x) \le d(x_n, x_{n_k}) + d(x_{n_k}, x) < 2\epsilon$$

ולכן $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ מתכנסת ל- x.

ב. אם המרחב קומפקטי אז לכל סדרה בו יש תת סדרה מתכנסת, ובפרט לכל סדרת קושי בו יש תת סדרה מתכנסת. לפי א' הסדרת הקושי עצמה מתכנסת, ולכן המרחב שלם.

4) אם המרחב לא שלם קח סדרת קושי לא מתכנסת. $\{x_m\}_{m=1}^{\infty}$ ותגדיר $F_n=\{x_m\}_{m=n}^{\infty}$ (הזנב של הסדרה, מ- n והילך)

היותה סדרת קושי פירושו שלכל $\epsilon>0$ קיים N כך שלכל $N<n,m$ מתקיים $d(x_n,x_m)<\epsilon$, ז"א שכל שני איברים ב- $F_N=\{x_m\}_{m=N}^{\infty}$ קרובים אחד לשני עד כדי ϵ ולכן $\delta(F_N)\le\epsilon$. בפרט $\delta(F_n)\to 0$. אבל $\bigcap_{n=1}^{\infty}F_n=\bigcap_{n=1}^{\infty}\{x_m\}_{m=N}^{\infty}=\emptyset$.

כל $F_n=\{x_m\}_{m=n}^{\infty}$ היא סדרת קושי לא מתכנסת ולכן קבוצה סגורה.

סדרת קושי לא מתכנסת היא קבוצה סגורה כי אילו הייתה לה נקודת הצטברות אז היא הייתה חייבת להיות גבול חלקי של הסדרה, ולפי 3) הסדרה כן הייתה מתכנסת.

אם המרחב כן שלם, אז ניקח סדרה $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ כך ש- $x_n\in F_n$. לכל ϵ ישנו N עבורו $\delta(F_N)<\epsilon$ ובפרט לכל $N<n,m$ מתקיים $x_n,x_m\in F_N$ ולכן $d(x_n,x_m)\le\delta(F_N)<\epsilon$. $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ סדרת קושי ולכן מתכנסת לגבול $x\in X$.

בנוסף, לכל n מתקיים $\{x_m\}_{m=n}^{\infty}\subseteq F_n$ ולכן הגבול x שייך ל- F_n.

נובע ש- $x\in\bigcap_{n=1}^{\infty}F_n$