פתרון מועד ב' אינפי 3 תשע"ז

1. תהי $E \subset \mathbb{R}^n$.
א. הגדירו את השפה ∂E של הקבוצה E.

פתרון:
השפה של קבוצה היא הסגור פחות הפנים: $\partial E = cl\left(A\right) \backslash int\left(A\right)$.

ב. הוכיחו כי ∂E היא קבוצה סגורה.

פתרון:
מתקיים: $\partial E = cl\left(A\right) \cap cl\left(A^c\right)$ (מכיוון שמתקיים $int\left(A\right)^c = cl\left(A^c\right)$) ולכן השפה סגורה כחיתוך של סגורות.

ג. הראו כי ∂E היא קבוצת נקודות אי-הרציפות של הפונקציה:

$$\chi_E\left(x\right) = \begin{cases} 1 & x \in E \\ 0 & x \notin E \end{cases}$$

פתרון:
χ_E רציפה בנקודה x_0 אם לכל $\varepsilon > 0$ קיים $\delta > 0$ כך שאם $\|x - x_0\| < \delta$ אז $\|\chi_E\left(x\right) - \chi_E\left(x_0\right)\| < \varepsilon$.
כעת, אם $x_0 \in \partial E$, בכל סביבה של x_0 קיימות $x_1 \in E, x_2 \notin E$.
כלומר, לכל $\delta > 0$ קיימות x_1, x_2 המקיימות: $\|x_1 - x_0\|, \|x_2 - x_0\| < \delta$ עבורן: $\chi_E\left(x_1\right) = 1, \chi_E\left(x_2\right) = 0$.
בכל מקרה, מתקיים $\|\chi_E\left(x_1\right) - \chi_E\left(x_0\right)\| \geq \frac{1}{2}$ או $\|\chi_E\left(x_2\right) - \chi_E\left(x_0\right)\| \geq \frac{1}{2}$ ולכן הפונקציה לא רציפה בנקודה x_0.
לצד שני, אם $x_0 \notin \partial E$, אם $x_0 \in int\left(E\right)$ מכיוון ש-$int\left(E\right)$ פתוחה קיים $\delta > 0$ עבורו $B\left(x_0, \delta\right) \subseteq int\left(E\right)$.
לכל $x \in B\left(x_0, \delta\right) \subseteq int\left(E\right) \subseteq E$, $\chi_E\left(x\right) = 1$. מכיוון שגם $\chi_E\left(x_0\right) = 1$, $\delta > 0$ מתאים לכל $\varepsilon > 0$ והפונקציה רציפה.
אם $x_0 \notin cl\left(A\right)$, $x_0 \in cl\left(A\right)^c$. $cl\left(A\right)^c$ פתוחה (משלימה של סגורה), ולכן קיים $\delta > 0$ עבורו $B\left(x_0, \delta\right) \subseteq cl\left(A\right)^c$.
כמו במקרה הקודם, δ מתאים לכל $\varepsilon > 0$ והפונקציה רציפה.

2. מצאו את הנקודה הקרובה ביותר ואת הנקודה הרחוקה ביותר מהראשית על האליפסה המתקבלת על ידי חיתוך של הגליל $x^2 + y^2 = 1$ עם המישור $x + y + z = 1$.

פתרון:

נשתמש כמובן בפונקציית המרחק בריבוע:

$$f(x,y,z)=x^2+y^2+z^2$$

עם האילוצים:

$$g_1(x,y,z)=x^2+y^2-1=0, g_2(x,y,z)=x+y+z-1=0$$

הלגראנז'יאן היא:

$$L(x,y,z,\lambda_1,\lambda_2)=f+\lambda_1 g_1+\lambda_2 g_2$$

נגזור לפי כל אחד מהמשתנים ונשווה לאפס:

$$\begin{cases} L_x=2x+2\lambda_1 x+\lambda_2=0 \\ L_y=2y+2\lambda_1 y+\lambda_2=0 \\ L_z=2z+\lambda_2=0 \\ x^2+y^2-1=0 \\ x+y+z-1=0 \end{cases}$$

נחסר את המשוואה הראשונה מהשנייה ונקבל: $2y+2\lambda_1 y-(2x+2\lambda_1 x)=0$, כלומר: $2(1+\lambda_1)(2y-2x)=0$.

נקבל מכאן שתי אפשרויות. אם $x=y$, מהמשוואה הרביעית נקבל $x^2+x^2-1=0$ כלומר $x=\pm\sqrt{\frac{1}{2}}$ וכך גם $y=\pm\sqrt{\frac{1}{2}}$.

מהמשוואה החמישית נקבל $z=1\mp\sqrt{2}$, וקיבלנו שתי נקודות: $\left(\sqrt{\frac{1}{2}},\sqrt{\frac{1}{2}},1-\sqrt{2}\right),\left(-\sqrt{\frac{1}{2}},-\sqrt{\frac{1}{2}},1+\sqrt{2}\right)$.

אם $\lambda_1=-1$, מהמשוואה הראשונה (או השנייה) נקבל $\lambda_2=0$ ומהמשוואה השלישית נקבל $z=0$.

מהמשוואה החמישית נקבל $y=1-x$. נציב זאת ברביעית ונקבל: $x^2+(1-x)^2-1=0$. נפתח ונקבל: $2x^2-2x=0$, כלומר $x=0,1$.

מכיוון ש-$y=1-x$ נקבל שתי נקודות: $(0,1,0),(1,0,0)$.

נחשב את ריבוע המרחק בכל אחת מהנקודות:

$$f\left(-\sqrt{\frac{1}{2}},-\sqrt{\frac{1}{2}},1+\sqrt{2}\right)=\frac{1}{2}+\frac{1}{2}+1+2\sqrt{2}+2=4+\sqrt{8}$$

$$f\left(\sqrt{\frac{1}{2}},\sqrt{\frac{1}{2}},1-\sqrt{2}\right)=\frac{1}{2}+\frac{1}{2}+1-2\sqrt{2}+2=4-\sqrt{8}$$

$$f(0,1,0)=f(1,0,0)=1$$

לכן הנקודות הקרובות ביותר הן $(0,1,0),(1,0,0)$ והנקודה הרחוקה ביותר היא $\left(-\sqrt{\frac{1}{2}},-\sqrt{\frac{1}{2}},1+\sqrt{2}\right)$.

3. חשבו את נפח הגוף ב-$\mathbb{R}^3$ אשר נמצא מעל הפרבולואיד $z=a\left(x^2+y^2\right)$ ומתחת למישור $z=h$ $(a,h>0)$.

<u>פתרון:</u>

הנפח הוא:

$$\iiint dxdydz = \iint \left(h - a\left(x^2+y^2\right)\right) dxdy$$

נעבור לקואורדינטות קוטביות. מעגל החיתוך בין הפרבולואיד והמישור הוא $a\left(x^2+y^2\right) = h$.

אם נטיל אותו למישור xy נקבל מעגל שמרכזו בראשית ורדיוסו $\sqrt{\frac{h}{a}}$.

אם כן, $0 \le r \le \sqrt{\frac{h}{a}}$, $0 \le \theta \le 2\pi$ והיעקוביאן הוא r. $x^2+y^2=r^2$ כמובן ולכן:

$$V = \int\limits_0^{\sqrt{\frac{h}{a}}} \int\limits_0^{2\pi} \left(h - ar^2\right) r d\theta dr = 2\pi \cdot \int\limits_0^{\sqrt{\frac{h}{a}}} \left(hr - ar^3\right) dr = 2\pi \cdot \left(\frac{hr^2}{2} - \frac{ar^4}{4}\right)\Big|_{r=0}^{r=\sqrt{\frac{h}{a}}} =$$

$$= 2\pi \cdot \left(\frac{h^2}{2a} - \frac{h^2}{4a}\right) = \frac{\pi h^2}{2a}$$

4. חשבו:

$$\iint\limits_E e^{\frac{x}{y}} dxdy$$

כאשר $E \subset \mathbb{R}^2$ הוא התחום המוגבל על ידי הישרים $x=0$, $y=1$ והעקום $y=\sqrt{x}$.

<u>פתרון:</u>
האינטגרל לא פשוט לפי y, ולכן נהפוך את סדר האינטגרציה. $x=y^2$, $0 \le y \le 1$ ונקבל:

$$\iint\limits_E e^{\frac{x}{y}} dxdy = \int\limits_0^1 \int\limits_0^{y^2} e^{\frac{x}{y}} dxdy = \int\limits_0^1 ye^{\frac{x}{y}}\Big|_{x=0}^{x=y^2} dy = \int\limits_0^1 \left(ye^y - y\right) dy =$$

בשביל המחובר השמאלי נשתמש באינטגרציה בחלקים:

$$\int\limits_0^1 ye^y dy = ye^y|_{y=0}^{y=1} - \int\limits_0^1 e^y dy = e - (e-1) = 1$$

וסה"כ:

$$\iint\limits_E e^{\frac{x}{y}} dxdy = \int\limits_0^1 ye^y dy - \int\limits_0^1 ydy = 1 - \frac{1}{2} = \frac{1}{2}$$

5. תהי $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ קבוצה מדידה ז'ורדן וקשירה מסילתית, ותהי $f:\Omega \to \mathbb{R}$ פונקציה רציפה וחסומה. הוכיחו כי קיים $\xi \in \Omega$ כך ש-

$$\int\limits_\Omega f(x)\,dx = f(\xi)\,Vol(\Omega)$$

כאשר $Vol\left(\Omega\right)$ הוא הנפח של Ω.

<u>פתרון:</u>
נסמן $Vol\left(\Omega\right)=V$. נזכור שמתקיים: $\int_{\Omega}dx=V$. נסמן:

$$m=\inf_{\Omega}f\leq f\leq\sup_{\Omega}f=M$$

אינטגרציה שומרת על אי-השוויון:

$$\int_{\Omega}mdx\leq\int_{\Omega}f\left(x\right)dx\leq\int_{\Omega}Mdx$$

ולכן: $mV\leq\int_{\Omega}f\left(x\right)dx\leq MV$.
כעת, אם $mV=\int_{\Omega}f\left(x\right)dx$, אז $\int_{\Omega}\left(f\left(x\right)-m\right)dx=0$ ולכן $f\left(x\right)=m$ פרט לקבוצה ממידה אפס.
בפרט קיים ξ עבורו $f\left(\xi\right)=m$ ואז $\int_{\Omega}f\left(x\right)dx=f\left(\xi\right)V$ כנדרש. עבור $MV=\int_{\Omega}f\left(x\right)dx$ הרעיון דומה.
אם:

$$mV<\int_{\Omega}f\left(x\right)dx<MV$$

מכיוון ש$-f$ רציפה והקבוצה Ω קשירה מסילתית גם תמונת f היא קשירה (אינטרוול) ולכן קיימים $x_{1},x_{2}\in\Omega$ עבורם:

$$mV<f\left(x_{1}\right)V\leq\int_{\Omega}f\left(x\right)dx\leq f\left(x_{2}\right)V<MV$$

לפי משפט ערך הביניים לכל $f\left(x_{1}\right)\leq t\leq f\left(x_{2}\right)$ קיימת $\xi\in\Omega$ עבורה: $f\left(\xi\right)=t$, ובפרט קיימת $\xi\in\Omega$ עבורה:

$$\int_{\Omega}f\left(x\right)dx=f\left(\xi\right)Vol\left(\Omega\right)$$

כנדרש.