שאלה 9

יהיו $A,B\subset \mathbb{R}^n$, כך ש $\bar{A}\neq\bar{B}$ וגם $int(A)\cap int(B)\neq\emptyset$

אזי

$$\partial(A\cap B)\subset(\partial A)\cup(\partial B)$$

פתרון:

ברור ש $\partial(A\cap B)\subseteq(\partial(A))$

$$\partial(A\cap B)\subseteq(\partial(B))$$

$$\Downarrow$$

$$\partial(A\cap B)\subseteq\partial(A)\cap\partial(B)$$

(כדי להראות שהכלה הפוכה לא נכונה:

נניח בשלילה ש $\partial(A)\cup\partial(B)=\partial(A\cap B)$

$$\Downarrow$$

$$\partial(A)\cup\partial(B)\subseteq\partial(A\cap B)$$

$$\Downarrow$$

$$\partial(A)\subseteq\partial(A\cap B)$$

$$\Downarrow$$

$$\partial(A)=\partial(A\cap B)$$

באותו אופן (נקבל ש:

$$\partial(B)=\partial(A\cap B)$$

$$\Downarrow$$

$$\partial(A)=\partial(B)$$

$$\Downarrow$$

$$\partial(A)=\partial(B)$$

~~ולכן~~ ~~ש~~ ולכן קיים ש $\bar{A}=\bar{B}$ בסתירה

לכן, קיים ש $int B=ext(A)=\mathbb{R}^n\setminus\bar{A}$

ולכן $Int(A)\cap int(B)=\emptyset$

בסתירה לנתון.

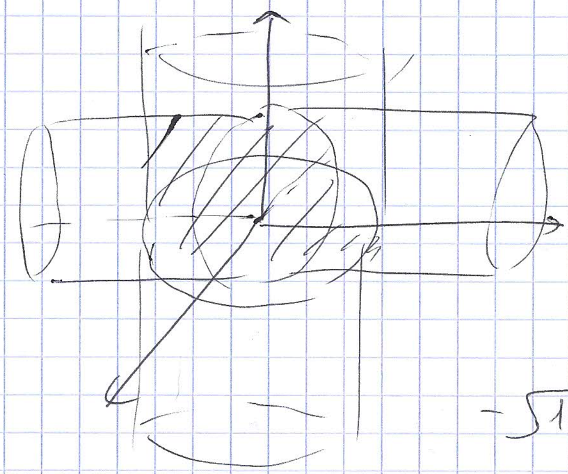
~~פתרון~~ 5

תרגיל 5 א

חשב את נפח הגוף ב- $\mathbb{R}^3$ המוגדר
מחיתוך שני הגלילים $x^2+y^2\le 1$ ו- $x^2+z^2\le 1$

פתרון:

הגוף שמוגדר מחיתוך של שני גלילים הוא
הגוף הבא:



הציור של הגוף הזה
על מישור xy
הוא מעגל היחידה
ולכן בכיוון האינטגרציה
בשביל y: $-\sqrt{1-x^2}\le y\le\sqrt{1-x^2}$
ובשביל x: $-1\le x\le 1$

הגוף שלנו הוא סימטרי ביחס למישור xy
ולכן נחשב את ~~זה~~ האינטגרל מעל המישור
xy ואחרי זה נכפיל ב 2 את המספר שיתקבל.
בכיוון האינטגרציה עבור z מעל המישור xy
הוא: $0\le z\le\sqrt{1-x^2}$
ולכן ~~ה~~ הנפח של הגוף שלנו הוא

$$\frac{V(G)}{2}=\int_{-1}^{1}\int_{-\sqrt{1-x^2}}^{\sqrt{1-x^2}}\int_{0}^{\sqrt{1-x^2}}1\cdot dz\,dy\,dx=$$

$$=\int_{-1}^{1}\int_{-\sqrt{1-x^2}}^{\sqrt{1-x^2}}\sqrt{1-x^2}\,dy\,dx=$$

$$=\int_{-1}^{1}\sqrt{1-x^2}\cdot y\Big|_{-\sqrt{1-x^2}}^{\sqrt{1-x^2}}dx=$$

$$=\int_{-1}^{1}1-x^2-(-(1-x^2))\,dx=\int 2-2x^2=2\left[x-\frac{x^3}{3}\right]_{-1}^{1}=$$

$$=\frac{8}{3}\Rightarrow Vol(G)=2\cdot\frac{8}{3}=\frac{16}{3}$$

תרגיל ב

יהי $Q\subset\mathbb{R}^n$ תיבה סגורה ו- $f: Q\to\mathbb{R}$

פונק' רציפה. הוכיחו כי הגרף

$$\Gamma_f=\{(x,f(x)) : x\in Q\}$$

של f הוא קבוצה זניחה ב- $\mathbb{R}^{n+1}$

לכן כי f רציפה על תחום קומפקטי Q ומכאן במ"ש ⇒

פתרון: יהי $\varepsilon>0$ ונבחר $\delta>0$ כך ש $|x_1-x_2|<\delta$

נובע ש $|f(x_1)-f(x_2)|<\varepsilon$

יהי Π חלוקה של Q לתיבות סגורות

חלוקה שמכילה תיבות כך שקוטר של

כל תיבה S ב Π יהיה קטן מ-δ

$$M_f(S)-m_f(S)<\varepsilon$$

$$M_f(S)=\max_S f$$

$$m_f(S)=\min_S f$$

לכן Γ מכוסה ע"י תיבות $n+1$

מימדיות

$$\tilde{S}=S\times[m_f(S),M_f(S)]$$

$$V_{n+1}(\tilde{S})=V_n(S)\cdot(M_f(S)-m_f(S))<\varepsilon\cdot V_n(S)$$

$$\sum_{\tilde{S}}V_{n+1}(\tilde{S})<\varepsilon\cdot\sum_S V_n(S)=\varepsilon\cdot V(Q)$$

וסיימנו.

הערה: השתמשנו בכך שבחלוקה Π של תיבה Q

ל תיבות S מתקיים

$$\sum_{S\in\Pi}V(S)=V(Q)$$

■

__שאלה 6__

אם f פונקציה אינטגרבילית על קבוצה

$Z \subset \mathbb{R}^n$ ונניח כי לכל תיבה $Q \subset Z$ מתקיים

$\int_Q f(x)\,dx = 0$. הוכח כי $f(x) = 0$

לכל $x \in Z$ פרט לקבוצה זניחה.

__פתרון:__ f אינטגרבילית על Z לכן היא

רציפה בכל Z פרט לקבוצה זניחה שנסמנה

ב-T $\Rightarrow$ $Z \setminus T = Z'$ ולכן

$$0 = \int_Z f(x) = \int_{Z'} f(x)$$

נניח בשלילה ש-$f \neq 0$ בקבוצה שאינה זניחה

שנסמנה ב-A, ונראה שנמצא לה בהכרח

דוגמת תיבה ב-Z שבה $\int_Q f(x) \neq 0$

בסתירה לנתון.

f רציפה ב-Z' ולכן בהכרח קיימת

תיבה K שבה $f \geq \varepsilon$ כאשר $\varepsilon > 0$

או $f \leq -\varepsilon$. נניח בה"כ שקיימת (דוגמא

שבה $f \geq \varepsilon$ נסמנה ב K_1 היא תיבה

שאינה זניחה (אחרת היו מקבלים שקבוצה שבה

$f \geq \varepsilon$ ~~$f \geq \varepsilon$~~ היא זניחה וגם קבוצה

שבה $f \leq -\varepsilon$ היא זניחה $\Rightarrow$ איחוד של כל

אלה הוא A ולכן A זניחה כאיחוד

של שתי זניחות בסתירה להנחת השלילה)

$$\int_{K_1} f(x) \geq \int_{K_1} \varepsilon = \varepsilon \cdot V(K_1) > 0$$

כי K_1 אי-זניחה.

המשך לשאלה 6

לכן מצאנו דוגמה $K_1 \subset Z$ שבה האינטגרל של f אינו מתאפס בסתירה לכך שלכל $Z \subset Q$ מתקיים $\int_Q f(x)\,dx = 0$, סתירה, $f=0 \Leftarrow$ פרט אולי לקבוצה זניחה.

<u>תרגול 8</u>

<u>שאלה:</u>

יהי Ω_j $\quad \Omega_1 \subset \Omega_2 \subset \Omega_3 \subset \ldots$

סדרה של קבוצות מדידות ז'ורדן. נניח כי

הקבוצה $\Omega = \bigcup_{j=1}^{\infty} \Omega_j$ גם מדידה ז'ורדן

הוכיחו כי

$$\lim_{j\to\infty} v(\Omega_j) = v(\Omega)$$

<u>פתרון:</u> יהי $\varepsilon > 0$ נבחר כיסוי סופי של

תיבות פתוחות $\Omega \subset U$ כך ש $v(\bar{U}) < \varepsilon$

לכל j מספיק גדול, אזי $\Omega \setminus \Omega_j \subset \bar{U}$.

אזי

$$v(\Omega) - v(\Omega_j) = v(\Omega \setminus \Omega_j) \le v(\bar{U}) < \varepsilon$$

וסיימנו.

תרגיל מ-הרצאה שעבר.

יהי $E \subset \mathbb{R}^n$ קבוצה זניחה ותהי $f: E \to \mathbb{R}^n$

פונקציה כזאת ש~~אז $f(E)$ גם כן זניחה~~

שמקיימת תנאי ליפשיץ לכל $x,y \in E$ כלומר

אם $x,y \in E$ אזי $|f(x)-f(y)| \le M \cdot \|x-y\|$

עבור $M>0$, אזי $f(E)$ גם כן

קבוצה זניחה:

פתרון: E קבוצה זניחה ולכן ניתן לכסות

אותה ע"י תיבות פתוחות U_j עם נפח ~~סכום~~

~~סכום~~ קטן מ ε ולכן $\sum_j v(U_j) < \varepsilon$

אזי $f(E)$ ניתן לכסות ע"י

מכלל תנאי ליפשיץ

תיבות פתוחות V_j עם נפח קטן מ M כפ

ולכן

$$\sum_j v(V_j) < M \cdot \varepsilon$$

ולכן $f(E)$ קבוצה זניחה.

∎