

תרגיל 11 בפונקציות מרוכבות

1. תהי z_0 נקודת סינגולריות עיקרית של $f(z)$. תהי $g(z)$ פונקציה שלמה ולא קבועה. הוכיחו כי z_0 היא גם סינגולריות עיקרית של ההרכבה $g \circ f$.
2. פתחו את הפונקציה

$$f(z) = \frac{1}{z^2(z-2)}$$

לטור לורך בטבעת הנתונה

(א) הטבעת $|z-2| > 2$

(ב) הטבעת $0 < |z-2| < 2$

3. מצאו את החלק העיקרי (דהיינו החלק עם חזקות שליליות) של טור לורך של הפונקציה

$$\frac{ze^{iz}}{(z^2+9)^2}$$

סביב הנקודה $z_0 = 3i$

4. הראו כי אם ל f קוטב ב z_0 ול g יש סינגולריות עיקרית ב z_0 אז ל $f+g$ יש סינגולריות עיקרית ב z_0 .
5. חשבו את האינטגרלים הבאים (המסילות מכוונות נגד כיוון השעון):

(א) $\int_{|z|=3} \frac{z^3}{e^{\frac{1}{z^2}}} dz$

(ב) $\int_{|z|=2} \frac{z^6}{(z-3)(z-1)^6} dz$

(ג) $\int_{\gamma} \frac{1+z}{\sin z} dz$ כאשר γ הוא הריבוע שקודקודיו $4+4i, 4-4i, -4+4i, -4-4i$

(ד) $\int_{|z|=1} \frac{1}{z^2(e^z-1)} dz$