בדידה הרצאה 5

<u>תזכורת:</u>

תהי A קבוצה ויהי $R \subseteq A \times A$ יחס על A.

א. אנו אומרים ש-R רפלקסיבי, אם:

$$\forall a \in A : (a, a) \in R$$

ב. אנו אומרים ש-R סימטרי, אם:

$$\forall a, b \in A : (a, b) \in R \to (b, a) \in R$$

ג. אנו אומרים ש-R טרנזיטיבי, אם:

$$\forall a, b, c \in A : (a, b) \in R \land (b, c) \in R \to (a, c) \in R$$

אם R מקיים את כל 3 התכונות, R נקרא יחס שקילות (יח"ש).

אם R יחס שקילות, לכל $a \in A$ מוגדרת מחלקת שקילות, באופן הבא:

$$[a]_R = \{b \in A : (a,b) \in R\}$$

קבוצת כל מחלקות השקילות נקראת קבוצת המנה:

$$A/R = \{[a]_R : a \in A\}$$

הוכחנו משפט יפה:

יהיו A קבוצה ו-R יח"ש על A. מחלקות השקילות מקיימות:

א. לכל $a \in A$, $[a]_R \neq \emptyset$.

ב. $\bigcup_{a \in A} [a]_R = A$.

ג. לכל $a, b \in A$: $[a]_R = [b]_R \vee [a]_R \cap [b]_R = \emptyset$.

לאחר מכן, הגדרנו את מושג החלוקה של קבוצה - תהיינה A קבוצה ו-$F = \{A_i : i \in I\}$ קבוצה של תתי-קבוצות של A. F נקראת חלוקה של A, אם מתקיימים התנאים הבאים:

א. לכל $i \in I$, $A_i \neq \emptyset$.

ב. $\bigcup F = \bigcup_{i \in I} A_i = A$.

ג. אם $i \neq j$ אז: $A_i \cap A_j = \emptyset$.

עינינו הרואות - קבוצת המנה היא חלוקה של A. במילים אחרות, כל יחס שקילות על A מגדיר חלוקה של A. אפשר לומר - משרה חלוקה.

למשל: $A=\{1,2,3,4,5\}$, $F=\{\{1,2\},\{3,4\},\{5\}\}$, כאן: $A_1=\{1,2\},A_2=\{3,4\},A_3=\{5\}$, קבוצת האינדקסים I היא: $I=\{1,2,3\}$.
לעומת זאת, אם $A=\mathbb{R}$, $F=\{\{x\}:x\in\mathbb{R}\}$, כאן: $I=\mathbb{R}$, $A_i=\{i\}$.

השאלה המתבקשת היא מה קורה בכיוון ההפוך – אם נתונה לנו חלוקה $F=\{A_i:i\in I\}$ של A, האם יש יח"ש R על A ש-F היא קבוצת המנה שלו? במילים אחרות, האם כל חלוקה מגדירה ("משרה") יחס שקילות?

התשובה היא כן, כל חלוקה מגדירה יחס שקילות, באופן הבא.

הקבוצה היא A והחלוקה היא $F=\{A_i:i\in I\}$, אז יחס השקילות שהחלוקה F מגדירה הוא:

$$R_F=\bigcup_{i\in I}(A_i\times A_i)$$

כלומר, נכפיל כל קבוצה בחלוקה בעצמה ונאחד את כל המכפלות.

למשל, $F=\{\{1,2\},\{3,4\},\{5\}\}$, $A=\{1,2,3,4,5\}$. כאן: $A_1=\{1,2\},A_2=\{3,4\},A_3=\{5\}$, ולכן:

$$R_F=(A_1\times A_1)\cup(A_2\times A_2)\cup(A_3\times A_3)=$$

$$(\{1,2\}\times\{1,2\})\cup(\{3,4\}\times\{3,4\})\cup(\{5\}\times\{5\})=$$

$$\{(1,1),(1,2),(2,1),(2,2)\} \cup \{(3,3),(3,4),(4,3),(4,4)\} \cup \{(5,5)\}$$

כלומר:

$$R_F = \{(1,1),(1,2),(2,1),(2,2),(3,3),(3,4),(4,3),(4,4),(5,5)\}$$

אם החלוקה הייתה שונה, למשל: $F = \{\{1\},\{2,3\},\{4\},\{5\}\}$, היחס R_F היה שונה.

מה שצריך להראות הוא שבאופן כללי, R_F הוא אכן יח"ש.

<u>הוכחה:</u>

נראה ש-R_F רפלקסיבי, סימטרי וטרנזיטיבי. $R_F = \bigcup_{i\in I}(A_i \times A_i), F = \{A_i : i \in I\}$

א. רפלקסיביות: יהי $a \in A$, צ"ל: $(a,a) \in R_F$.

אם כן, קיים $i \in I$ כך ש: $a \in A_i$, מכיוון ש: $\bigcup F = A$. לכן, $(a,a) \in A_i \times A_i$ ולכן – לפי הגדרת איחוד – נקבל שאכן: $(a,a) \in \bigcup_{i\in I}(A_i \times A_i)$, כלומר $(a,a) \in R_F$.

ב. סימטריות: יהיו $a,b \in A$ כך ש: $(a,b) \in R_F$, צ"ל: $(b,a) \in R_F$.

אם כן, $(a,b) \in R_F$ פירושו: $(a,b) \in \bigcup_{i\in I}(A_i \times A_i)$, ולפי הגדרת איחוד פירוש הדבר שקיים $i \in I$ כך ש: $(a,b) \in A_i \times A_i$. לכן, $a,b \in A_i$ ולכן: $(b,a) \in A_i \times A_i$. מהגדרת איחוד, נקבל שאכן: $(b,a) \in \bigcup_{i\in I}(A_i \times A_i)$, כלומר: $(b,a) \in R_F$.

ג. טרנזיטיביות: יהיו $a,b,c \in A$ כך ש: $(a,b),(b,c) \in R_F$, צ"ל: $(a,c) \in R_F$.

אם כן, $(a,b) \in R_F$ פירושו שקיים $i \in I$ כך ש: $a,b \in A_i$, כפי שהסברנו בהוכחת סימטריות.

באופן דומה, $(b,c) \in R_F$ פירושו שקיים $j \in I$ כך ש: $c,b \in A_j$.

מכיוון ש-F חלוקה, קבוצות הן שוות או זרות. הקבוצות A_i, A_j לא זרות, מכיוון ש: $b \in A_i \cap A_j$, ולכן הן בהכרח שוות: $A_i = A_j$ (אפשר גם: $i = j$).

מכאן, אנו מקבלים ש: $a,c \in A_i$ ולכן: $(a,c) \in R_F$, כמו בהוכחת סימטריות.

סה"כ, R_F אכן יח"ש, כנדרש.

<u>הערה:</u>

את היחס R_F אפשר היה לרשום גם באופן הבא:

$$(a,b) \in R_F \iff \exists i \in I : a,b \in A_i$$

כלומר, שני איברים מתייחסים זה לזה אם הם שייכים לאותה קבוצה מהחלוקה.

<u>יחסי סדר:</u>

<u>תזכורת:</u> תהי A קבוצה ויהי R יחס על A. R נקרא אנטי-סימטרי, אם:

$$\forall a,b \in A : (a,b) \in R \wedge (b,a) \in R \rightarrow a = b$$

במילים אחרות, R לא אנטי-סימטרי, אם יש בו זוג וההפוך שלו, והם שונים.

כעת, R נקרא יחס סדר על A, אם הוא רפלקסיבי, אנטי-סימטרי וטרנזיטיבי.

דוגמאות:

א. היחס "קטן-שווה" בין מספרים ממשיים (או כל קבוצת ממשיים אחרת):

$$(a,b) \in R \iff a \leq b$$

R רפלקסיבי: לכל $a \in \mathbb{R}$, $a \leq a$.

R אנטי-סימטרי: לכל $a,b \in \mathbb{R}$ המקיימים: $a \leq b \wedge b \leq a$ אכן: $a = b$.

R טרנזיטיבי: לכל $a,b,c \in \mathbb{R}$ המקיימים: $a \leq b \wedge b \leq c$ אכן: $a \leq c$.

הערה: מכיוון שהיחס "קטן-שווה" הוא הדוגמה הבסיסית והפשוטה ביותר ליחס סדר, יש מקומות שבהם מלכתחילה מסמנים יחס סדר ב-$\leq$, גם אם הוא לא "קטן-שווה" האורגינל על מספרים אלא סתם יחס סדר על סתם קבוצה.

ב. יחס ההכלה על קבוצה של קבוצות:

$$(A,B) \in R \iff A \subseteq B$$

R רפלקסיבי: לכל A, $A \subseteq A$.

R אנטי-סימטרי: לכל A,B, אם $A \subseteq B \wedge B \subseteq A$ אז: $A = B$; זו הכלה דו-כיוונית.

R טרנזיטיבי: לכל A, B, C, אם $A \subseteq B \wedge B \subseteq C$ אז: $A \subseteq C$.

ג. היחס "מחלק את" על מספרים טבעיים:

נזכיר – יהיו $a, b \in \mathbb{N}$. אנו אומרים ש-a מחלק את b (או שב-b מתחלק ב-a) ומסמנים: $a|b$, אם b הוא כפולה של a. כלומר, קיים $k \in \mathbb{N}$ כך ש: $b = ak$. למשל: $16 = 2 \cdot 8$, לכן: $2|16, 8|16$. מצד שני, 3 לא מחלק את 17.

כעת, היחס "מחלק את" מוגדר כך:

$$(a, b) \in R \iff a|b$$

R רפלקסיבי: לכל $a \in \mathbb{N}$, $k = 1$ מקיים: $a = ka$ ולכן, לפי ההגדרה, $a|a$.

R אנטי-סימטרי: לכל $a, b \in \mathbb{N}$, אם $a|b \wedge b|a$, בהכרח: $a \leq b \wedge b \leq a$ ואז: $a = b$. נשים לב שאכן: $a|b \to a \leq b$, כי: $ka \geq a$.

<u>הערה:</u> אפשר להגדיר את היחס "מחלק את" גם על השלמים, אבל אז הוא לא יהיה אנטי-סימטרי, למשל: $2|-2 \wedge -2|2$ למרות ש: $2 \neq -2$.

R טרנזיטיבי: לכל $a, b, c \in \mathbb{N}$, אם $a|b \wedge b|c$, לפי ההגדרה קיימים $k, m \in \mathbb{N}$ כך ש: $b = ak, c = bm$.

נציב את המשוואה השמאלית בתוך הימנית ונקבל: $c = akm$. מכיוון ש: $k, m \in \mathbb{N}$, גם $km \in \mathbb{N}$ ולכן, לפי ההגדרה, $a|c$.

<u>דיאגרמת הסה $Hasse$:</u>

דיאגרמת הסה זו דרך ויזואלית נוחה להציג יחס סדר.

אם כן, תהי A קבוצה ויהי R יחס סדר על A. את דיאגרמת הסה של R

אנחנו מציירים לפי הכללים הבאים.

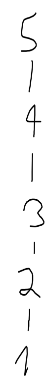
1. אם $(a,b) \in R$, אז נמקם את a מתחת ל-b ונמתח ביניהם קו.

2. בהמשך לכך, אם $(a,b) \in R \wedge (b,c) \in R$, מהטרנזיטיביות נקבל ש: $(a,c) \in R$. במצב כזה, לא צריך למתוח קו "ישיר" בין a ל-c; ה"מסלול" בין a ל-c דרך b מספיק.

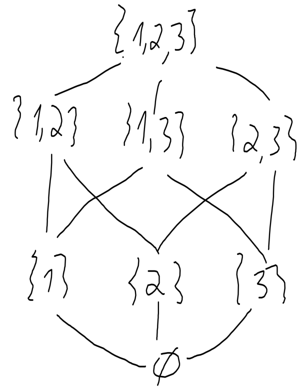
דוגמאות – מהלוח הלבן.

$A=\{1,2,3,4,5\}$, היחס "קטן-שווה" ≤

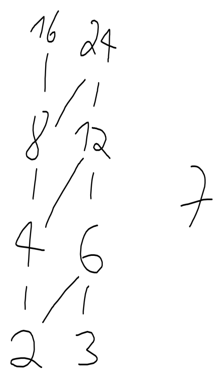
$\{(1,1),\dots,(5,5),$
$(1,2),(2,3),\dots$
$(1,3),(1,5),\dots\}$



$P(\{1,2,3\})$, עם יחס ההכלה:



$A=\{2,3,4,6,8,12,16,24,7\}$, "מחלק את":



<u>יחס סדר מלא:</u>

תהי A קבוצה ויהי R יחס סדר על A.

אנו אומרים ש-R הוא יחס סדר מלא, אם:

$$\forall a,b \in A : (a,b) \in R \vee (b,a) \in R$$

כלומר, כל שני איברים מתייחסים זה לזה.

למשל, היחס "קטן-שווה" על מספרים טבעיים הוא יחס סדר מלא – לכל שני טבעיים a, b, $a \le b \lor b \le a$.

לעומת זאת, היחס "מחלק את" איננו בהכרח יחס סדר מלא – למשל, על הקבוצה: $A = \{2,3,4,6,8,12,16,24\}$, היחס "מחלק את" איננו מלא; למשל, האיברים $2,3 \in A$ לא מתייחסים זה לזה: $2 \not| 3 \land 3 \not| 2$.

אם הקבוצה היא: $A = \{2,4,8\}$ אז היחס "מחלק את" כן יחס סדר מלא.

בדיאגרמה, יחס סדר הוא מלא אם ורק אם הדיאגרמה שלו היא עמודה אחת.

<u>הערות:</u>

1. יחס סדר מלא נקרא גם יחס סדר קווי או ליניארי; זאת, מכיוון שדיאגרמת הסה של יחס סדר מלא היא פשוט קו אחד ארוך...
2. יחס סדר מלא נקרא גם יחס סדר משווה.

ברמת העיקרון, אפשר היה להגדיר את התכונה הזו ליחסים באופן כללי, לאו דווקא ליחסי סדר, למשל:

$$A = \{1,2,3\}, R = \{(1,1),(2,2),(3,3),(1,2),(3,1),(2,1),(2,3)\}$$

כפי שאנו הגדרנו, אנו מצטמצמים לדיון על התכונה של "יחס מלא" כשמדובר ביחסי סדר.

3. כמו תמיד, אפשר לשאול – האם חיתוך של יחסי סדר הוא יחס סדר (כן)? ומה לגבי איחוד (לא)? והאם חיתוך של יחסי סדר מלאים הוא יחס

סדר מלא (לא)? ועל זו הדרך...

היחס ההפוך של יחס סדר הוא גם יחס סדר; הדיאגרמה של R^{-1} היא הדיאגרמה ה"הפוכה" של R – מי שהיה למטה בדיאגרמה של R עכשיו נמצא למעלה ולהיפך. לכן, אם היחס R הוא יחס סדר מלא , אז גם R^{-1} הוא יחס סדר מלא.

4. יש מקומות שבהם קוראים ליחס סדר יחס סדר חלקי, בלי קשר להאם יחס הסדר הוא מלא או לא...

5. בהמשך לסעיף הקודם, אם R יחס סדר על A, אפשר לסמן ולומר: (A, R) קס"ח – קבוצה סדורה חלקית.

אם R יחס סדר מלא, אפשר לסמן ולומר: (A, R) קס"מ – קבוצה סדורה באופן מלא.

<u>הערה נוספת:</u>

שאלה מתבקשת – מה לגבי היחס "קטן-ממש"? כלומר, על המספרים הממשיים:

$$(a, b) \in R \iff a < b$$

לפי ההגדרות שלנו, הוא לא יחס סדר מכיוון שהוא איננו רפלקסיבי. יתרה מזאת, הוא אנטי-רפלקסיבי.

אם רוצים לדבר על יחסים כאלו, אפשר להגדיר תכונה שנקראת "אנטי-סימטריות חזקה":

$$\forall a, b \in A : (a, b) \in R \to (b, a) \notin R$$

יחס שהוא אנטי-סימטרי חזק הוא בהכרח אנטי-רפלקסיבי.

כעת, אפשר להגדיר ולומר שיחס R נקרא יחס סדר חזק (או חד) אם הוא אנטי-סימטרי חזק וטרנזיטיבי, כמו "קטן-ממש".

יש מקומות (הפתוחה) שליחסי סדר חזקים קוראים יחסי סדר ("סתם").