

פתרון תרגיל 9 בדידה להנדסה:

1. נבדוק האם כל אחד מהיחסים מקיים את שתי התכונות:

(א) $3 \in \mathbb{Z}$, ומתקיים $((3, 8) \in f) \wedge ((3, 903) \in f)$ אך $8 \neq 903$ ולכן היחס אינו חד ערכי.

(ב) \mathbb{Q} הוא שדה, ולכן לכל איבר יש נגדי. לכן, לכל $x \in \mathbb{Q}$ קיים $y \in \mathbb{Q}$ עבורו $x = -y$ כלומר $(x, y) \in f$ ולכן היחס הוא שלם. יתר על כן, איבר נגדי הוא יחיד, ולכן לכל $x \in \mathbb{Q}$ קיים $y \in \mathbb{Q}$ יחיד כזה, כלומר היחס הוא חד ערכי. לכן היחס הוא פונקציה.

(ג) $1 \in \mathbb{N}$ ומתקיים $((1, 949884523) \in f) \wedge ((1, 2) \in f)$ ולכן היחס אינו חד ערכי.

(ד) $(2, 2) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}$ אך $((2, 2), (87, 87)) \in f \wedge ((2, 2), (3, 3)) \in f$ ולכן היחס אינו חד ערכי.

2. נבדוק האם התכונות הדרושות מתקיימות:

(א) לכל $x \in \mathbb{R}$, $x^2 \in \mathbb{R}$ ולכן היחס שלם. כמו כן, אם $x^2 \neq y^2$ אז $x \neq y$ ולכן היחס הוא חד ערכי. סה"כ, היחס הוא פונקציה.

(ב) $-9 \in \mathbb{R}$ אך לא קיים $y \in \mathbb{R}$ כך ש $\sqrt{-9} = y$ ולכן היחס אינו שלם ולכן לא פונקציה.

(ג) $0 \in \mathbb{R}$ אך לא קיים $y \in \mathbb{R}$ כך ש $\ln(0^4) = y$ ולכן היחס אינו שלם ולכן לא פונקציה.

3. נבדוק מהן הקבוצות של איברים מהצורה $f(x)$:

(א) $f(-2) = 16, f(2) = 16, f(3) = 81, f(\sqrt{5}) = 25, f(9) = 6561$ ולכן:

$$f(A) = \{16, 81, 25, 6561\}$$

(ב) $\tan 0 = 0$, $\lim_{x \rightarrow -\frac{\pi}{2}^+} \tan x = -\infty$, היא פונקציה רציפה ולכן (ערך הביניים? למדנו את זה?) היא מקבלת את כל הערכים בין $-\infty$ לבין 0. כלומר, התמונה היא:

$$f(B) = (-\infty, 0)$$

(ג) התמונה של $\sin x$ היא $[-1, 1]$ ולכן התמונה של $\sin^2 x$ היא $[0, 1]$. לכן, התמונה של $\sin^2 x + 1$ היא $[1, 2]$. $\ln 1 = 0$ ולכן סה"כ תמונת הקבוצה תהיה:

$$f(C) = [0, \ln 2]$$