

## תרגיל 11

מצאו פתרון כללי למד"רים הבאים:

$$1. \quad y'' + 3y' = 9x$$

פתרון:

הפתרון של המערכת ההומוגנית הוא:  $c_1 + c_2e^{-3x}$ .

$y$  חסר במשוואה, ולכן ננחש פתרון מהצורה:  $y_p = x(Ax + B)$ .

$$\text{נגזור: } y'_p = 2Ax + B, y''_p = 2A$$

$$\text{נציב במשוואה: } 2A + 6Ax + 3B = 9x$$

$$\text{מהשוואה מקדמים נקבל: } A = 1.5, B = -1$$

$$\text{לכן הפתרון הפרטי הוא: } y_p = 1.5x^2 - x$$

$$\text{והפתרון הכללי הוא: } y = c_1 + c_2e^{-3x} + 1.5x^2 - x$$

$$2. \quad y'' - 3y' + 2y = e^x$$

פתרון:

הפתרון של המערכת ההומוגנית הוא:  $c_1e^x + c_2e^{2x}$ .

1 הוא פתרון לא יחיד של המשוואה האופיינית, ולכן ננחש פתרון מהצורה:  $y_p = Axe^x$ .

$$\text{נגזור: } y'_p = Ae^x + Axe^x = Ae^x(x+1), y''_p = Ae^x(x+1) + Ae^x$$

$$\text{נציב: } Ae^x(x+1) + Ae^x - 3Ae^x(x+1) + 2Axe^x = e^x$$

$$-Ae^x = e^x$$

$$A = -1$$

$$\text{לכן הפתרון הפרטי הוא: } y_p = -xe^x$$

$$\text{והפתרון הכללי הוא: } y = c_1e^x + c_2e^{2x} - xe^x$$

$$3. \quad y'' - 2y' + 5y = xe^x$$

פתרון:

הפתרון של המערכת ההומוגנית הוא:  $c_1e^x \cos 2x + c_2e^x \sin 2x$ .

1 הוא לא פתרון של המשוואה האופיינית, לכן ננחש פתרון מהצורה  $y_p = (Ax+B)e^x$ .

$$\text{נגזור: } y'_p = e^x(Ax+B) + Ae^x = e^x(Ax+A+B)$$

$$y''_p = e^x(Ax+A+B) + Ae^x = e^x(Ax+2A+B)$$

$$\text{נציב: } e^x(Ax+2A+B) - e^x(2Ax+2A+2B) + e^x(5Ax+5B) = xe^x$$

$$\text{נשווה מקדמים: } 4A = 1 \implies A = \frac{1}{4}$$

$$4B = 0 \implies B = 0$$

לכן הפתרון הפרטי הוא:  $y_p = \frac{1}{4}xe^x$

והפתרון הכללי הוא:  $y = c_1e^x \cos 2x + c_2e^x \sin 2x + \frac{1}{4}xe^x$

$$.4 \quad y'' - 9y' + 20y = x^2e^{4x}$$

פתרון:

הפתרון הכללי של המערכת ההומוגנית הוא:  $c_1e^{4x} + c_2e^{5x}$ .

מכיוון ש 4 הוא פתרון לא יחיד של המשוואה האופיינית, ננחש פתרון מהצורה:

$$.y_p = x(Ax^2 + Bx + C)e^{4x}$$

נגזור ונציב במשוואה. לאחר השוואת מקדמים נקבל:  $A = \frac{1}{2}, B = 1, C = -\frac{1}{3}$

לכן הפתרון הפרטי הוא:  $y_p = (\frac{1}{2}x^3 + x^2 - \frac{1}{3}x)e^{4x}$

והפתרון הכללי הוא:  $y = c_1e^{4x} + c_2e^{5x} + (\frac{1}{2}x^3 + x^2 - \frac{1}{3}x)e^{4x}$

$$.5 \quad y'' - 8y' + 16y = e^{4x}$$

פתרון:

הפתרון הכללי של ההומוגנית הוא:  $c_1e^{4x} + c_2xe^{4x}$

4 הוא שורש יחיד של המשוואה האופיינית, לכן ננחש פתרון מהצורה:  $y_p = Ax^2e^{4x}$ .

נגזור ונציב במשוואה. נקבל:  $A = \frac{1}{2}$ .

לכן הפתרון הפרטי הוא:  $y_p = \frac{1}{2}x^2e^{4x}$

והפתרון הכללי הוא:  $y = c_1e^{4x} + c_2xe^{4x} + \frac{1}{2}x^2e^{4x}$