תרגיל 2 מבוא לתורת החבורות

שאלה 2.1 הראו שבכל חבורה G עם מספר זוגי של איברים קיים איבר $x \neq e$ המקיים $x^2 = e$. (רמז: לכל איבר בחבורה יש הופכי יחיד).

שאלה 2.2 קבעו (והוכיחו את קביעתכם) האם התת קבוצות הבאות הן תת חבורות של החבורות הנתונות או לא:

1. $\mathbb{N} \subseteq (\mathbb{Z}, +)$.
2. $O_n(F) = \left\{A \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{F}) \mid A^t = A^{-1}\right\} \subseteq \mathrm{GL}_n(\mathbb{F})$ המטריצות האורתוגונליות.
3. $\{A \in \mathrm{M}_n(\mathbb{F}) \mid \det A = 0\} \subseteq (\mathrm{M}_n(\mathbb{F}), +)$ (כאן $\mathrm{M}_n(\mathbb{F})$ הן כל המטריצות הריבועיות $n \times n$ עם פעולת החיבור)

שאלה 2.3 תהינה $H, K \leq G$ שתי תתי חבורות של חבורה G. הוכיחו או הפריכו את הטענות הבאות:

1. $H \cup K$ היא גם תת חבורה של G.
2. HK היא גם תת חבורה של G. (כאשר $HK = \{hk \mid h \in H \quad k \in K\}$)

שאלה 2.4 יהיו $m, n \in \mathbb{Z}$ שני מספרים שלמים. נסמן $d = \gcd(m, n)$ הוכיחו כי

$$\gcd(\frac{m}{d}, \frac{n}{d}) = 1$$

שאלה 2.5 הוכיחו כי בשביל שני מספרים שלמים $m, n \in \mathbb{Z}$ מתקיים כי $m \mid n$ אם ורק אם $\langle n\rangle \subseteq \langle m\rangle$. (כאשר $\langle n\rangle$ מסמן את התת חבורה הנוצרת על ידי n בתוך $(\mathbb{Z}, +)$. למעשה $\langle n\rangle = n\mathbb{Z}$)

שאלה 2.6 חשבו את המחלק המשותף המקסימלי של זוגות המספרים הבאים. בנוסף, בטאו את ה $\gcd$ כצירוף של שני המספרים.

1. -11, 24
2. 22, 117
3. 2780, 785