

## תרגיל 9 מבוא לתורת החבורות

**שאלה 9.1** מצאו את החבורות הבאות: (הן כולן ציקליות ולכן איזומורפיות ל  $\mathbb{Z}_k$  כלשהוא, השאלה היא מהו  $k$ ?)

1.  $\mathbb{Z}_{100}/\langle 7 \rangle$ .

2.  $\mathbb{Z}_{100}/\langle 15 \rangle$ .

3.  $\mathbb{Z}_{25}/\langle 15 \rangle$ .

**שאלה 9.2** תהי  $G$  חבורה. תהי  $K \triangleleft G$  תת חבורה נורמלית מאינדקס 14. תהי  $H \leq G$  תת חבורה כך ש  $K \leq H \leq G$  ו  $H$  לא נורמלית. מהו האינדקס  $[G : H]$ ? (במידת הצורך, העזרו בפתרון הבוחן).

**שאלה 9.3** 1. הוכיחו את הטענה הבאה, שהשתמשו בה היום בתרגול:  
תהי  $G$  חבורה ויהיו  $a, b \in G$  שני איברים מתחלפים  $ab = ba$ . עוד נתון כי  $\langle a \rangle \cap \langle b \rangle = \{e\}$  הוכיחו כי

$$o(ab) = \text{lcm}(o(a), o(b))$$

2. הסיקו כי אם  $a, b \in G$  איברים מתחלפים  $ab = ba$  מסדרים זרים ( כלומר  $\text{gcd}(o(a), o(b)) = 1$  אז

$$o(ab) = o(a) o(b)$$

**שאלה 9.4** נתונה תמורה ב  $S_9$

$$\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 \\ 4 & 8 & 9 & 6 & 2 & 1 & 7 & 5 & 3 \end{pmatrix}$$

1. רשמו את  $\sigma$  כמכפלת מחזורים זרים.

2. מצאו את הסדר של  $\sigma$ .

3. מצאו את הסדר של  $\sigma^{14}$ .

4. האם  $\sigma$  זוגית או אי זוגית?

5. כתבו את  $\sigma^{-1}$  ואת  $\sigma^2$  כמכפלת מחזורים זרים.

**שאלה 9.5** ב"מצאו תת חבורה" הכוונה היא שמספיק למצוא יוצרים לתת חבורה כנ"ל. (אבל צריך להוכיח שהיא עונה על הדרישות).

1. מצאו תת חבורה מסדר 20 של  $S_{12}$ .

2. מצאו תת חבורה מסדר 20 של  $A_{12}$ .

**שאלה 9.6** הוכיחו כי קבוצת המעגלים מאורך 3 יוצרת את  $A_4$ .