תרגיל 3

1. הוכיחו כי הסדרות הבאות מתכנסות לגבולות הרשומים בצד ימין.

א. 0 $\qquad a_n = \frac{1}{n+27}$

$$|a_n - L| = \left|\frac{1}{n+27} - 0\right| = \frac{1}{n+27} < \frac{1}{n}$$

יהי $\epsilon > 0$. נבחר $N = \left\lceil\frac{1}{\epsilon}\right\rceil$. אם $n > N$ אז $n > \frac{1}{\epsilon}$ ומתקיים $|a_n - L| < \frac{1}{n} < \epsilon$ כדרוש.

ב. 1 $\qquad \mathrm{a_n} = \frac{n+3}{n+32}$

$$|a_n - L| = \left|\frac{n+3}{n+32} - 1\right| = \frac{29}{n+32} < \frac{29}{n}$$

יהי $\epsilon > 0$. נבחר $N = \left\lceil\frac{29}{\epsilon}\right\rceil$. אם $n > N$ אז $n > \frac{29}{\epsilon}$ ומתקיים $|a_n - L| < \frac{29}{n} < \epsilon$ כדרוש.

ג. 4 $\qquad \mathrm{a_n} = \frac{4n^2-25}{n^2-16}$

$$|a_n - L| = \left|\frac{4n^2-25}{n^2-16} - 4\right| = \frac{39}{n^2-16} < \frac{39}{n^2 - \frac{1}{2}n^2} = \frac{78}{n^2}$$

יהי $\epsilon > 0$. נבחר $N = \left\lceil\sqrt{\frac{78}{\epsilon}}\right\rceil$. אם $n > N$ אז $n > \sqrt{\frac{78}{\epsilon}}$ ומתקיים $|a_n - L| < \frac{78}{n^2} < \epsilon$ כדרוש.

2. מיצאו את הגבולות של הסדרות הבאות והוכיחו כי הן מתכנסות אליהם, או הוכיחו כי הן אינן מתכנסות.

א. $\mathrm{a_n} = \frac{(-1)^n}{n^8}$

אינטואיטיבית "מנחשים" שהגבול הוא 0. נוכיח זאת:

$$|a_n - L| = \left|\frac{(-1)^n}{n^8} - 0\right| = \frac{1}{n^8} < \frac{1}{n}$$

יהי $\epsilon > 0$. נבחר $N = \left\lceil\frac{1}{\epsilon}\right\rceil$. אם $n > N$ אז $n > \frac{1}{\epsilon}$ ומתקיים $|a_n - L| < \frac{1}{n} < \epsilon$ כדרוש.

ב. $a_n = \frac{1+(-1)^n}{2^n+24}$

אינטואיטיבית "מנחשים" שהגבול הוא 0. נוכיח זאת:

$$|a_n - L| = \left|\frac{1+(-1)^n}{2^n+24} - 0\right| = \frac{1+(-1)^n}{2^n+24} < \frac{2}{2^n} = \frac{1}{2^{n-1}} < \frac{1}{n}$$

(המעבר האחרון $2^{n-1} \geq n$ לכל n טבעי באינדוקציה: בסיס $n = 1$, אכן $2^0 \geq 1$. נניח כי מתקיים $2^{k-1} \geq k$ ואז $2^k = 2 \cdot 2^{k-1} \geq 2k \geq k+1$.)

יהי $\epsilon > 0$. נבחר $N = \left\lceil\frac{1}{\epsilon}\right\rceil$. אם $n > N$ אז $n > \frac{1}{\epsilon}$ ומתקיים $|a_n - L| < \frac{1}{n} < \epsilon$ כדרוש.

ג. $a_n = \frac{n^3-n^2+\sqrt{n}}{n^3+n^2-\sqrt{n}}$

אינטואיטיבית "מנחשים" שהגבול הוא 1. נוכיח זאת:

$$|a_n-L|=\left|\frac{n^3-n^2+\sqrt{n}}{n^3+n^2-\sqrt{n}}-1\right|=\left|\frac{-2n^2+2\sqrt{n}}{n^3+n^2-\sqrt{n}}\right|=\frac{2n^2-2\sqrt{n}}{n^3+n^2-\sqrt{n}}<\frac{2n^2}{n^3-\sqrt{n}}<\frac{2n^2}{n^3-\frac{1}{2}n^3}=\frac{4}{n}$$

הסבר למעבר הלפני אחרון: $\frac{1}{2}n^3>\sqrt{n}$ לכל $n\geq 2$ כי $n^6>4n$ לכל $n\geq 2$ כי $n(n^5-4)>0$ לכל $n\geq 2$.

יהי $\epsilon>0$. נבחר $N=\left\lceil\frac{4}{\epsilon}\right\rceil$. ואז אם $n>N$ אז אז בפרט $n\geq 2$ והחישוב לעיל תקף, וכיוון ש-$n>\frac{4}{\epsilon}$ אז

$$|a_n-L|=\frac{4}{n}<\frac{4}{4/\epsilon}=\epsilon$$

כדרוש.

3. הוכיחו כי $a_n=\frac{\sqrt{n}+n}{2n-7\sqrt{n}}$ לא מתכנסת ל-$\frac{1}{7}$.

הגדרת a_n מתכנסת ל-$\frac{1}{7}$: לכל $\epsilon>0$ יש N כך שלכל $n>N$ טבעי מתקיים $\left|\frac{\sqrt{n}+n}{2n-7\sqrt{n}}-\frac{1}{7}\right|<\epsilon$.

ולכן הגדרת a_n איננה מתכנסת ל-$\frac{1}{7}$: יש $\epsilon>0$ כך שלכל N יש $n>N$ טבעי כך ש-$\left|\frac{\sqrt{n}+n}{2n-7\sqrt{n}}-\frac{1}{7}\right|\geq\epsilon$.

מתקיים $\frac{5}{14}=\frac{5n}{14n}\geq\frac{14\sqrt{n}+5n}{14n-49\sqrt{n}}=\left|\frac{14\sqrt{n}+5n}{14n-49\sqrt{n}}\right|=\left|\frac{\sqrt{n}+n}{2n-7\sqrt{n}}-\frac{1}{7}\right|$. המעבר השני נכון רק ל-$n\geq 13$.

לכן נוכל לבחור $\epsilon=\frac{5}{14}$ ואז לכל $n\geq 13$ טבעי מתקיים $\left|\frac{\sqrt{n}+n}{2n-7\sqrt{n}}-\frac{1}{7}\right|\geq\epsilon$. *כלומר, בהינתן* N, *נבחר* $n=max(N+1,13)$.

<u>הערה:</u> היה ניתן לפתור תרגיל זה גם כך: להוכיח ישירות שהסדרה מתכנסת ל-$\frac{1}{2}$ ולכן גבולה איננו $\frac{1}{7}$ מיחידות הגבול.

4. הוכיחו כי $a_n=\frac{1+(-1)^n}{2}$ לא מתכנסת.

נניח בשלילה כי $a_n\to L$ באשר L מס' ממשי.

אפשרות ראשונה: $L\geq\frac{1}{2}$.

$a_n\to L$ לכן עבור $\epsilon=\frac{1}{2}$ מתקיים כי קיים N כך שלכל $n>N$ מתקיים $|\mathrm{a_n-L}|<\frac{1}{2}$ כלומר $\left|\frac{1+(-1)^n}{2}-L\right|<\frac{1}{2}$ ובפרט עבור $\mathrm{n>N}$ אי-זוגי מתקיים $|0-L|<\frac{1}{2}$

כלומר $L<\frac{1}{2}$ סתירה.

אפשרות שניה: $L<\frac{1}{2}$.

באופן דומה $a_n\to L$ לכן עבור $\epsilon=\frac{1}{2}$ מתקיים כי קיים N כך שלכל $n>N$ מתקיים $|\mathrm{a_n-L}|<\frac{1}{2}$ כלומר $\left|\frac{1+(-1)^n}{2}-L\right|<\frac{1}{2}$ ובפרט עבור $\mathrm{n>N}$ זוגי מתקיים $|1-L|<\frac{1}{2}$.

כלומר בפרט $1-L<\frac{1}{2}$ כלומר $L>\frac{1}{2}$, סתירה.

5. להזכירכם, הגדרנו: סדרה ממשית (a_n) מתכנסת למספר הממשי L אם:

לכל $\epsilon>0$ ממשי קיים N טבעי כך שלכל n טבעי המקיים $n>N$ מתקיים $|a_n-L|<\epsilon$.

א. הראו כי אם בהגדרה לעיל משנים את $n>N$ ל-$n\geq N$ מתקבלת הגדרה שקולה.

הגדרה שקולה כלומר: כל סדרה שמתכנסת לפי ההגדרה לעיל מתכנסת גם לפי ההגדרה עם $n\geq N$ ולאותו גבול, ולהיפך.

נניח כי (a_n) מקיימת את $\forall\epsilon>0\ \exists N_1\in\mathbb{N}\ \forall n>N_1\quad |a_n-L|<\epsilon$ ורוצים להראות שהיא מקיימת את $\forall\epsilon>0\ \exists N_2\in\mathbb{N}\ \forall n\geq N_2\quad |a_n-L|<\epsilon$.

יהי $\epsilon>0$. לפי ההנחה יש N_1 טבעי כך שלכל n טבעי המקיים $n>N_1$ מתקיים $|\mathrm{a_n-L}|<\epsilon$.

נבחר $N_2=N_1+1$. ואז אם $n\geq N_2$ כלומר $n\geq N_1+1$ אז $n>N_1$ ולכן לפי ההנחה $|a_n-L|<\epsilon$ כדרוש.

בכיוון ההפוך אפשר לבחור את אותו ה-N כי אם משהו מתקיים לכל $N \geq n$ אז הוא מתקיים גם לכל $n > N$.

ב. באופן דומה, הראו כי אם משנים את $|a_n - L| < \epsilon$ בהגדרה לעיל ל- $|a_n - L| \leq \epsilon$, מתקבלת הגדרה שקולה.

נניח כי (a_n) מקיימת את $\forall\epsilon_1 > 0\ \exists N_1 \in \mathbb{N}\ \forall n > N_1\ \ |a_n - L| \leq \epsilon_1$ ורוצים להראות שהיא מקיימת את

$\forall\epsilon_2 > 0\ \exists N_2 \in \mathbb{N}\ \forall n > N_2\ \ |a_n - L| < \epsilon_2$.

יהי $\epsilon_2 > 0$. נבחר $\epsilon_1 = \frac{\epsilon_2}{2}$. אז לפי ההנחה יש N_1 כך שלכל $n > N_1$ מתקיים $|a_n - L| \leq \epsilon_1 = \frac{\epsilon_2}{2} < \epsilon_2$. נבחר $N_2 = N_1$ ואז אכן אם $n > N_2$ אז $n > N_1$ ומתקיים $|a_n - L| < \epsilon_2$ כדרוש.

בכיוון ההפוך אפשר לבחור את אותו ה-N כי אם $|a_n - L| < \epsilon$ אז גם $|a_n - L| \leq \epsilon$.

ג. הראו שההגדרה לעיל ***איננה*** שקולה להגדרה בה משנים את $\epsilon > 0$ ל- $\epsilon \geq 0$.

אף סדרה איננה מקיימת את ההגדרה עם $\epsilon \geq 0$, כי עבור $\epsilon = 0$ מקבלים שצריך להתקיים $|a_n - L| < 0$, מה שאף פעם לא מתקיים.

מצד שני ראינו שכן יש סדרות שמקיימות את הגדרת התכנסות, למשל $a_n = \frac{1}{n}$.

6. תהי a_n סדרה המתכנסת למספר π. נגדיר סדרה חדשה b_n שזהה לסדרה המקורית a_n בכל אחד מהאינדקסים מלבד האינדקס 314, ובאינדקס זה מתקיים $b_{314} = 2a_{314}$. הוכיחו כי b_n מתכנסת גם היא למספר π.

נתון כי $a_n \to \pi$ כלומר לכל $\epsilon > 0$ יש N כך שלכל $n > N$ טבעי מתקיים $|a_n - \pi| < \epsilon$.

צ"ל כי $b_n \to \pi$ כלומר כי לכל $\epsilon > 0$ יש N כך שלכל $n > N$ מתקיים $|b_n - \pi| < \epsilon$.

יהי $\epsilon > 0$. כיוון ש-$a_n \to \pi$ יש N' כך שלכל $n > N'$ טבעי מתקיים $|a_n - \pi| < \epsilon$.

נבחר $N = max(N', 314)$. ואז אם $n > N$ אז בפרט $n > 314$ כלומר $b_n = a_n$. כמו כן $n > N'$ ולכן $|a_n - \pi| < \epsilon$ כלומר $|b_n - \pi| < \epsilon$, מש"ל.

<u>הערה:</u> תרגיל זה הוא מקרה פרטי של הטענה הכללית שאם מוחקים/מוסיפים/משנים מספר *סופי* של איברי סדרה, הדבר לא משפיע על התכנסות הסדרה.

7. היעזרו באי-שוויון המשולש:

א. תהי (a_n) סדרה המתכנסת ל-0. נגדיר $b_n = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} a_k$. הוכיחו כי (b_n) מתכנסת ל-0.

נסמן $A(n) = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} a_k$.

יהי $\epsilon > 0$. צריך למצוא N כך שלכל $n > N$ טבעי מתקיים $|A(n)| < \epsilon$.

$a_n \to 0$ לכן קיים N_1 כך שלכל $n > N_1$ מתקיים $|a_n| < \frac{\epsilon}{4}$.

מחפשים $N > N_1$ כך שיתקיים $|A(N)| < \frac{\epsilon}{2}$, כי אם נמצא N כזה אז אכן לכל $n > N$ יתקיים

$$|A(n)| = \left|\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} a_k\right| \leq \frac{1}{n}\left|\sum_{k=1}^{N} a_k\right| + \frac{1}{n}\left|\sum_{k=N+1}^{n} a_k\right| \leq \frac{1}{N}\left|\sum_{k=1}^{N} a_k\right| + \frac{1}{n}(n-N)\frac{\epsilon}{4} \leq A(N) + \frac{1}{n}(n-0)\frac{\epsilon}{4} < \frac{\epsilon}{2} + \frac{\epsilon}{4} < \epsilon$$

כדרוש. למציאת N כזה נשים לב כי עבור כל $N > N_1$ מתקיים:

$$|A(N)| = \left|\frac{1}{N}\sum_{k=1}^{N} a_k\right| \leq \frac{1}{N}\left|\sum_{k=1}^{N_1} a_k\right| + \frac{1}{N}\left|\sum_{k=N_1+1}^{N_2} a_k\right| = \frac{N_1}{N}|A(N_1)| + \frac{1}{N}\left|\sum_{k=N_1+1}^{N} a_k\right| \leq \frac{N_1}{N}|A(N_1)| + \frac{1}{N}(N - N_1)\frac{\epsilon}{4} \leq \frac{N_1}{N}|A(N_1)| + \frac{\epsilon}{4}$$

אז צריך לבחור את N כך ש-$\frac{N_1}{N}|A(N_1)| < \frac{\epsilon}{4}$ כלומר כך ש- $N > \frac{4N_1|A(N_1)|}{\epsilon}$ (וגם $N > N_1$). אם כך נבחר

$$N = max\left(\left\lceil\frac{4N_1|A(N_1)|}{\epsilon}\right\rceil, N_1\right)$$

ואז מתקיים $|A(N)| \leq \frac{N_1}{N}|A(N_1)| + \frac{\epsilon}{4} < \frac{\epsilon}{4} + \frac{\epsilon}{4} = \frac{\epsilon}{2}$. כאמור הראנו שמכך נובע שלכל $n > N$ מתקיים $|A(n)| < \epsilon$ כדרוש.

ב. יהיו a,b,c מספרים ממשיים, ϵ,ζ ממשיים חיוביים. הוכיחו כי אם $|a-b|<\epsilon$, וגם $|b-c|<\zeta$ אז $|a-c|<\epsilon+\zeta$.

לפי אי-שוויון המשולש $|a-c|=|a-b+b-c|\le|a-b|+|a-c|=\epsilon+\zeta$

דרך אחרת לראות זאת: $|a-b|<\epsilon$ שקול ל-$-\epsilon<a-b<\epsilon$, וכן $|b-c|<\zeta$ שקול ל-$-\zeta<b-c<\zeta$. נחבר את שניהם יחדיו ונקבל $-\epsilon-\zeta<a-c<\epsilon+\zeta$ השקול ל-$|a-c|<\epsilon+\zeta$.

8. הוכיחו/הפריכו:

א. אם $\lim_{n\to\infty}|a_n|=L$ אז הסדרה (a_n) מתכנסת.

הפרכה: נסתכל על הסדרה $a_n=(-1)^n$ שכידוע איננה מתכנסת. מתקיים $|a_n|=1\to1$.

ב. אם $\lim_{n\to\infty}a_n=L$ אז $\lim_{n\to\infty}|a_n|=|L|$.

הוכחה: יהי $\epsilon>0$. צ"ל שיש N כך שלכל $n>N$ מתקיים $\big||a_n|-|L|\big|<\epsilon$.

כיוון ש-$a_n\to L$ יש N כך שלכל $n>N$ מתקיים $|a_n-L|<\epsilon$ ואז אכן $\big||a_n|-|L|\big|\le|a_n-L|<\epsilon$

באשר השתמשנו בכיוון ההפוך של אי-שוויון המשולש: $|a-b|\ge\big||a|-|b|\big|$ לכל a,b ממשים - קל להוכיח ע"י חלוקה למקרים. (למשל כאשר a חיובי ו-b שלילי אז צד שמאל הוא $a-b$ וצד ימין הוא $a+b$, וכך הלאה.)

ג. אם $\lim_{n\to\infty}a_n=\lim_{n\to\infty}|a_n|=L$ אז קיים N טבעי כך שלכל $n>N$ מתקיים $a_n>0$.

הפרכה: נסתכל על הסדרה $a_n=\frac{(-1)^n}{n}$. מתקיים $a_n\to0$, וכן $|a_n|=\frac{1}{n}\to0$, אך לא קיים N טבעי כך שלכל $n>N$ מתקיים $a_n>0$ כי עבור כל n אי-זוגי מתקיים $a_n=\frac{(-1)^n}{n}=\frac{-1}{n}<0$.