גיאומטריה אנליטית ודיפרנציאלית - שבוע 3

6 באוגוסט 2015

יהי M משטח רגולרי.

הנורמל למשטח בנקודה p הוא הנורמל למישור המשיק $T_p(M)$.

אנו יודעים שאם r פרמטריזציה של המשטח M, אז r_1, r_2 וקטורי הנגזרות פורשים את המישור המשיק.

לכן הם גם בת"ל והוקטור $r_1 \times r_2$ מאונך למישור המשיק $T_p(M)$.

נורמל היחידה למשטח הוא:

$$\vec{n} = \frac{r_1 \times r_2}{\|r_1 \times r_2\|}$$

מקומית, הנורמל משתנה בצורה רציפה, ולכן אפשר להגדיר העתקה: $\vec{n} : M \to S^2$ רציפה.

מכיוון שזהו וקטור יחידה, ההעתקה היא לתוך הספירה.

הפונקציה הרציפה הנ"ל נקראת העתקת גאוס.

כאשר המשטח נתון בצורה סתומה, $F(x,y,z) = 0$, נורמל היחידה הוא:

$$\vec{n} = \frac{\nabla F}{\|\nabla F\|}$$

<u>תרגילון:</u>

יהי $z = f(x,y)$ משטח. חשבו את המטריקה של המשטח.

<u>פתרון:</u>

פרמטריזציה של המשטח היא:

$$r(u,v) = (u, v, f(u,v))$$

וקטורי הנגזרות הם:

$$r_u = (1, 0, f_u), r_v = (0, 1, f_v)$$

ולכן מקדמי המטריקה הם:

$$g_{11} = \langle r_u, r_u \rangle = 1 + f_u^2$$
$$g_{12} = g_{21} = \langle r_u, r_v \rangle = f_u f_v$$
$$g_{22} = \langle r_v, r_v \rangle = 1 + f_v^2$$

ובסה"כ המטריקה היא:

$$G = \begin{pmatrix} 1 + f_u^2 & f_u f_v \\ f_u f_v & 1 + f_v^2 \end{pmatrix}$$

התבנית היסודית השנייה:

יהי M משטח ותהי $p \in M$. בסביבת הנקודה p קיימת העתקת גאוס: $\vec{n} : M \to S^2$ והיא חלקה.

לכן, אפשר להתבונן בדיפרנציאל של $\vec{n}$: $d_p\vec{n} : T_p(M) \to T_{\vec{n}(p)}(S^2)$ המוגדר על ידי $d_p\vec{n}(v) = J_{\vec{n}}(v)$.

ראינו נוסחה נוספת לחישוב הדיפרנציאל; אם γ עקומה כלשהי ב$-M$ כך ש: $\gamma(0) = p$ וגם $\gamma'(0) = v$ אז:

$$d_p\vec{n}\left(\gamma'(0)\right) = \left(\vec{n} \circ \gamma\right)'(0)$$

מכיוון שהנורמל הוא נורמל יחידה, אפשר להתייחס אל $T_{\vec{n}(p)}(S^2)$ כאל $T_p(M)$ ולכן להתייחס אל הדיפרנציאל כאל $d_p\vec{n} : T_p(M) \to T_p(M)$.

נגדיר את **אופרטור הצורה** $S : T_p(M) \to T_p(M)$ על ידי:

$$S(v) = -d_p\vec{n}(v)$$

אפשר להוכיח שמתקיים:

$$\langle S(a), b\rangle = \langle a, S(b)\rangle$$

לכל $a, b \in T_p(M)$. לכן S צמוד לעצמו ולכן S ניתן ללכסון וכל ערכיו העצמיים ממשיים.

נגדיר באמצעות S את **התבנית היסודית השנייה**.

זו תבנית בילינארית $II : T_p(M) \times T_p(M) \to \mathbb{R}$ המוגדרת על ידי:

$$II(a, b) = \langle S(a), b\rangle$$

אפשר להוכיח שהתבנית היסודית השנייה מיוצגת על ידי המטריצה:

$$B = \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \langle r_{uu}, \vec{n}\rangle & \langle r_{uv}, \vec{n}\rangle \\ \langle r_{vu}, \vec{n}\rangle & \langle r_{vv}, \vec{n}\rangle \end{pmatrix}$$

כלומר: $II(a, b) = b^t B a$.

<u>משפט:</u>

מתקיים:

$$S = G^{-1}B$$

<u>תרגיל:</u>

יהי M משטח הנתון על ידי המשוואה $z = f(x, y)$.

ידוע ש: $f(0,0)=0$, והמישור המשיק למשטח בנקודה $(0,0,0)$ הוא מישור ה$-xy$:

$$T_0(M)=\{(x,y,0):x,y\in\mathbb{R}\}$$

מצאו את התבנית היסודית השנייה.

<u>פתרון:</u>

נשתמש בפרמטריזציה: $r(u,v)=(u,v,f(u,v))$.

וקטורי הנגזרות הם:

$$r_u=(1,0,f_u),r_v=(0,1,f_v)$$

אנו יודעים שהמישור המשיק נפרש על ידי וקטורי הנגזרות, כלומר:

$$T_0(M)=\{(x,y,0):x,y\in\mathbb{R}\}=span\left\{r_u,r_v\right\}$$

ובפרט $r_u,r_v\in T_0(M)=\{(x,y,0):x,y\in\mathbb{R}\}$ ולכן: $f_u(0)=f_v(0)=0$.

כעת, וקטורי הנגזרות השניות הם:

$$r_{uu}=(0,0,f_{uu}),r_{uv}=(0,0,f_{uv}),r_{vv}=(0,0,f_{vv})$$

המישור שלנו הוא מישור xy, ולכן נורמל היחידה הוא $\vec{n}=(0,0,1)$.

איברי המטריצה B הם:

$$b_{11}=r_{uu}\cdot\vec{n}=f_{uu}$$

$$b_{21}=b_{12}=r_{uv}\cdot\vec{n}=f_{uv}$$

$$b_{22}=r_{vv}\cdot\vec{n}=f_{vv}$$

ולכן:

$$B=\begin{pmatrix} f_{uu} & f_{uv} \\ f_{vu} & f_{vv} \end{pmatrix}=H_f$$

זו מטריצת ההסיאן של f.

נבדוק מה התבנית עושה כשמפעילים אותה על אותו הוקטור:

$$I(v,v) = v^t B v = v^t H_f v = \sum_{i,j} f_{ij} v^i v^j$$

כאשר $v = (v^1, v^2)$. אם נוסיף את האיברים ששווים לאפס:

$$I(v,v) = f(0,0) + v^1 f_u + v^2 f_v + \sum_{i,j} f_{ij} v^i v^j$$

וזהו פיתוח טיילור מסדר 2 של f סביב $(0,0)$, פעמיים.

אם כן, התבנית היסודית השנייה היא קירוב ריבועי לפעמיים המרחק של משטח מההיטל שלו על המישור המשיק.

<u>שאלה:</u>

כיצד משתנות התבניות היסודיות כאשר מפעילים איזומטריה על המשטח?

<u>תשובה:</u>

לא משתנות. איזומטריה היא פונקציה $F : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ המוגדרת על ידי:

$$F(x) = Ax + b$$

כאשר A אורתוגונאלית. מכיוון ש$-A$ אורתוגונאלית, היא שומרת על מכפלה פנימית, וקל לראות שהתבניות לא ישתנו.

<u>מסקנה:</u>

כל משטח רגולרי M ניתן לסובב ולהזיז כך שנקודה p עוברת לראשית והמישור המשיק הוא מישור xy.

<u>תרגיל:</u>

מצאו את התבניות היסודיות הראשונה והשנייה ואת אופרטור הצורה עבור המשטחים הבאים.

א. $r(u,v)=(u\cos v,u\sin v,ku)$. כאשר $u,k>0, v\in[0,2\pi]$.

<u>פתרון:</u>

המשטח שלנו הוא חרוט.

נחשב את וקטורי הנגזרות:

$$r_u=(\cos v,\sin v,k), r_v=(-u\sin v,u\cos v,0)$$

מקדמי המטריקה הם:

$$\begin{gathered}
g_{11}=\langle r_u,r_u\rangle=\cos^2 v+\sin^2 v+k^2=1+k^2\\
g_{12}=g_{21}=\langle r_u,r_v\rangle=-u\cos v\sin v+u\cos v\sin v+0^2=0\\
g_{22}=\langle r_v,r_v\rangle=u^2\sin^2 v+u^2\cos^2 v+0^2=u^2
\end{gathered}$$

ולכן התבנית היסודית הראשונה מיוצגת על ידי המטריצה:

$$G=\begin{pmatrix} 1+k^2 & 0\\ 0 & u^2\end{pmatrix}$$

כעת, נחשב את הנורמל. המכפלה הוקטורית היא:

$$r_u\times r_v=\begin{vmatrix} i & j & k\\ \cos v & \sin v & k\\ -u\sin v & u\cos v & 0\end{vmatrix}=(-uk\cos v,-uk\sin v,u)$$

לכן:

$$\|r_u\times r_v\|=\sqrt{u^2k^2\cos^2 v+u^2k^2\sin^2 v+u^2}=u\sqrt{1+k^2}$$

והנורמל הוא:

$$\frac{r_u\times r_v}{\|r_u\times r_v\|}=\frac{1}{\sqrt{1+k^2}}(-k\cos v,-k\sin v,1)$$

כעת, וקטורי הנגזרות השניות הם:

$$r_{uu} = (0,0,0), r_{uv} = (-\sin v, \cos v, 0), r_{vv} = (-u\cos v, -u\sin v, 0)$$

ולכן איברי המטריצה B הם:

$$b_{11} = r_{uu} \cdot \vec{n} = 0$$
$$b_{21} = b_{12} = r_{uv} \cdot \vec{n} = k\cos v \sin v - k\cos v \sin v = 0$$
$$b_{22} = r_{vv} \cdot \vec{n} = \frac{1}{\sqrt{1+k^2}}\left(ku\cos^2 v + ku\sin^2 v\right) = \frac{ku}{\sqrt{1+k^2}}$$

ולכן:

$$B = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & \frac{ku}{\sqrt{1+k^2}} \end{pmatrix}$$

את אופרטור הצורה נחשב על ידי:

$$S = G^{-1}B$$

G מטריצה אלכסונית ולכן ההופכית היא:

$$G^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{1}{1+k^2} & 0 \\ 0 & \frac{1}{u^2} \end{pmatrix}$$

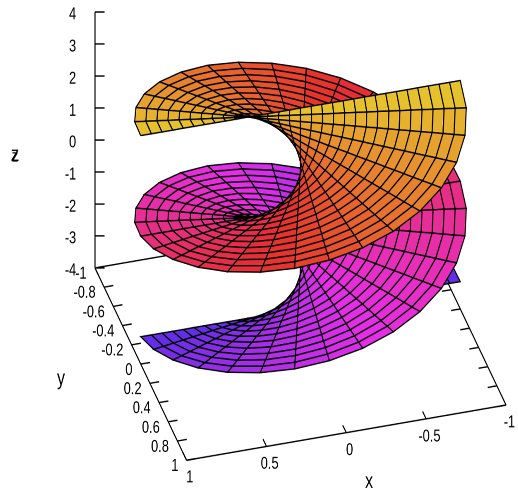
ולכן:

$$S = G^{-1}B = \begin{pmatrix} \frac{1}{1+k^2} & 0 \\ 0 & \frac{1}{u^2} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & \frac{ku}{\sqrt{1+k^2}} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & \frac{k}{u\sqrt{1+k^2}} \end{pmatrix}$$

ב. $r(u,v) = (u\cos v, u\sin v, kv)$ כאשר $u, k > 0, v \in \mathbb{R}$.

<u>פתרון:</u>

המשטח שלנו הוא הליקואיד:



נחשב את וקטורי הנגזרות:

$$r_u = (\cos v, \sin v, 0), r_v = (-u \sin v, u \cos v, k)$$

מקדמי המטריקה הם:

$$g_{11} = \langle r_u, r_u \rangle = \cos^2 v + \sin^2 v = 1$$
$$g_{12} = g_{21} = \langle r_u, r_v \rangle = -u \cos v \sin v + u \cos v \sin v + 0 = 0$$
$$g_{22} = \langle r_v, r_v \rangle = u^2 \sin^2 v + u^2 \cos^2 v + k^2 = u^2 + k^2$$

ולכן התבנית היסודית הראשונה נתונה על ידי המטריצה:

$$G = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & u^2 + k^2 \end{pmatrix}$$

נחשב את הנורמל. המכפלה הוקטורית היא:

$$r_u \times r_v = \begin{vmatrix} i & j & k \\ \cos v & \sin v & 0 \\ -u\sin v & u\cos v & k \end{vmatrix} = (k\sin v, -k\cos v, u)$$

לכן:

$$\|r_u \times r_v\| = \sqrt{k^2\sin^2 v + k^2\cos^2 v + u^2} = \sqrt{k^2+u^2}$$

ולכן הנורמל הוא:

$$\vec{n} = \frac{1}{\sqrt{u^2+k^2}}(k\sin v, -k\cos v, u)$$

וקטורי הנגזרות השניות הם:

$$r_{uu} = (0,0,0), r_{uv} = (-\sin v, \cos v, 0), r_{vv} = (-u\cos v, -u\sin v, 0)$$

נחשב את איברי המטריצה B:

$$b_{11} = r_{uu}\cdot\vec{n} = 0$$
$$b_{21} = b_{12} = r_{uv}\cdot\vec{n} = -\tfrac{1}{\sqrt{k^2+u^2}}(k\cos^2 v + k\sin^2 v) = -\tfrac{k}{\sqrt{u^2+k^2}}$$
$$b_{22} = r_{vv}\cdot\vec{n} = \tfrac{1}{\sqrt{1+k^2}}(-uk\sin v\cos v + uk\sin v\cos v) = 0$$

ולכן:

$$B = \begin{pmatrix} 0 & -\frac{k}{\sqrt{u^2+k^2}} \\ -\frac{k}{\sqrt{u^2+k^2}} & 0 \end{pmatrix}$$

כעת, המטריצה ההופכית של G היא:

$$G^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \frac{1}{k^2+u^2} \end{pmatrix}$$

ולכן:

$$S = G^{-1}B = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \frac{1}{k^2+u^2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & -\frac{k}{\sqrt{u^2+k^2}} \\ -\frac{k}{\sqrt{u^2+k^2}} & 0 \end{pmatrix} == \begin{pmatrix} 0 & -\frac{k}{\sqrt{u^2+k^2}} \\ -\frac{k}{(k^2+u^2)^{\frac{3}{2}}} & 0 \end{pmatrix}$$

מספר הגדרות:

בנקודה $p \in M$,

1. הכיוונים הראשיים הם הוקטורים העצמיים של S.
2. העקמומיות הראשיות (אכן יש כאן פער לשוני מסוים שקשה לגשר עליו בעברית) הן הערכים העצמיים של S; נסמנן ב־k_1, k_2.
3. עקמומיות גאוס היא $k = \det S = k_1 \cdot k_2$.
4. העקמומיות הממוצעת היא $H = \frac{k_1+k_2}{2} = \frac{1}{2}tr(S)$.
5. משטח מינימלי הוא משטח שבו $H = 0$ בכל נקודה.
6. קו עקמומיות הוא עקומה $\gamma : [a,b] \to M$ עבורה $\gamma'(t)$ כיוון ראשי לכל t.

<u>תרגיל:</u>

יהי $z = f(x,y)$ משטח. הנקודה p היא נקודה קריטית של z, והמישור המשיק בנקודה מקביל למישור xy.

כאשר $k > 0$, האם הנקודה היא נקודת קיצון? וכאשר $k < 0$?

<u>פתרון:</u>

במקרה שלנו, לפי אחד התרגילים הקודמים:

$$B = H_f$$

מכיוון ש־$S = G^{-1}B$, נקבל:

$$k = \det S = \det\left(G^{-1}B\right) = \frac{\det B}{\det G}$$

המטריצה G מגדירה מכפלה פנימית ולכן היא חיובית לחלוטין, כלומר $\det G > 0$.

לכן, הסימן של k זהה לסימן של $\det B$. לכן, כאשר $k > 0$ זו נקודת קיצון, וכאשר $k < 0$ זו נקודת פיתול.

כאשר $k > 0$, הנקודה היא נקודה אליפטית, כלומר המשטח דומה לאליפסואיד בסביבת הנקודה.

כאשר $k < 0$, הנקודה היא נקודה היפרבולית, כלומר המשטח דומה לאוכף בסביבת הנקודה.

כאשר $k = 0$, הנקודה היא נקודה פרבולית, כלומר המשטח דומה למישור/גליל בסביבת הנקודה.

<u>תרגיל:</u>

יהי M משטח כך ש: $H = k = 0$ בכל נקודה.

הוכיחו ש$-M$ הוא (חלק מ) מישור.

<u>פתרון:</u>

יש לנו שתי משוואות:

$$\begin{cases} k = k_1 k_2 = 0 \\ H = \frac{k_1 + k_2}{2} = 0 \end{cases}$$

ולכן k_1, k_2 שווים ל-0.

לכן הערך העצמי היחיד של S הוא 0, ומכיוון ש$-S$ צמוד לעצמו נקבל ש$-S = 0$.

נזכור ש:

$$S = -d\vec{n} = J_{\vec{n}}$$

ומכיוון שהיעקוביאן הוא 0, הנורמל קבוע: $\vec{n} = c$.

הנורמל למשטח קבוע ולכן המשטח נמצא על מישור.

אנו רוצים לחקור את עקמומיותו של משטח, ומכיוון שבכל נקודה במשטח יש שני כיווני התקדמות שונים (ביחס לוקטורי הנגזרות, שפורשים את המישור המשיק), יש לנו שני ערכי עקמומיות.

הסימן של ערכי העקמומיות קובע האם המשטח מתעקם לכיוון הנורמל או לכיוון הנגדי.

<u>תרגיל:</u>

עבור המשטחים הבאים, מצא את עקמומיות גאוס ואת העקמומיות הממוצעת.

א. חרוט: $r(u,v)=(u\cos v, u\sin v, ku)$.

<u>פתרון:</u>

חישבנו את אופרטור הצורה של החרוט באחד מהתרגילים הקודמים; האופרטור הוא:

$$S=\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & \frac{k}{u\sqrt{1+k^2}} \end{pmatrix}$$

לכן, ערכי העקמומיות הראשיים הם: $k_1=0, k_2=\frac{k}{u\sqrt{1+k^2}}$, ולכן:

$$k=0, H=\frac{k}{2u\sqrt{1+k^2}}$$

ב. הליקואיד: $r(u,v)=(u\cos v, u\sin v, kv)$.

<u>פתרון:</u>

אופרטור הצורה של ההליקואיד הוא:

$$S=\begin{pmatrix} 0 & -\frac{k}{\sqrt{u^2+k^2}} \\ -\frac{k}{(k^2+u^2)^{\frac{3}{2}}} & 0 \end{pmatrix}$$

ולכן:

$$k=\det S=-\frac{k^2}{(k^2+u^2)^2}, H=\frac{1}{2}tr(S)=0$$

אם כן, ניתן לראות שכאשר העקמומיות הממוצעת או עקמומיות גאוס מתאפסות לבדן,

לא ניתן להסיק שהמשטח מישורי.

נקודה אמבילית היא נקודה שבה $k_1=k_2$.

בנקודה אמבילית המטריצה S סקלרית.

כל כיוון ב$-T_p(M)$ הוא כיוון ראשי כאשר p אמבילית.

<u>תרגיל:</u>

יהי M משטח רגולרי שבו כל נקודה $p \in M$ היא אמבילית.

הוכיחו ש-M הוא חלק ממישור או ספירה.

<u>פתרון:</u>

לכל $p \in M$, $S_p = k_p \cdot I_2$. מהגדרת S, $S_p = -d_p\vec{n}$.

כעת, לפי הבסיס $\{r_u, r_v\}$, וקטורי הקואורדינטות של r_u, r_v הם $(1,0),(0,1)$.

לכן:

$$S(r_u) = -J_{\vec{n}} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = - \begin{pmatrix} \frac{\partial \vec{n}^1}{\partial u} \\ \frac{\partial \vec{n}^2}{\partial u} \end{pmatrix} = -\vec{n}_u$$

וכך גם $S(r_v) = -\vec{n}_v$ ואם כן אפשר לכתוב:

$$\begin{cases} kr_u = -\vec{n}_u \\ kr_v = -\vec{n}_v \end{cases}$$

ולכן אם נגזור את המשוואה הראשונה לפי v ואת המשוואה השנייה לפי u נקבל:

$$\begin{cases} -\vec{n}_{uv} = k_v r_u + kr_{uv} \\ -\vec{n}_{vu} = k_u r_v + kr_{uv} \end{cases}$$

ולכן:

$$k_v r_u + kr_{uv} = k_u r_v + kr_{uv}$$

כלומר $k_v r_u = k_u r_v$.

אך, אנו יודעים שהוקטורים r_u, r_v הם בת"ל, ולכן $k_u = k_v = 0$!

לכן העקמומיות k קבועה.

אם נחזור למשוואות שלנו, נקבל ש: $-\vec{n} = kr + v_0$,כאשר v_0 וקטור קבוע כלשהו.

אם $k = 0$, נקבל שהנורמל קבוע: $\vec{n} = -v_0$, ולכן המשטח חלק ממישור.

אם $k \neq 0$, נפעיל נורמה על שני אגפי המשוואה ונקבל:

$$1 = \|-\vec{n}\| = \|kr + v_0\|$$

ולכן:

$$\left\| r + \frac{v_0}{k} \right\| = \frac{1}{\|k\|}$$

כלומר כל נקודה במשטח נמצאת במרחק קבוע מ$-\frac{v_0}{k}-$ ולכן המשטח הוא חלק מספירה.

שימו לב, שהתרגיל דומה לתרגיל שעשינו על עקומות מישוריות - אם לעקומה מישורית עקמומיות קבועה, היא חלק מקו ישר או חלק ממעגל.

משטחי סיבוב:

תהי $\gamma(t) = (f(t), 0, g(t))$ עקומה (רגולרית) במישור xz.

נסובב את γ בזווית θ סביב ציר ה$-z$ ונקבל משטח עם פרמטריזציה התלויה בזוג (t, θ).

המשטח המתקבל הוא $r(t, \theta) = R_\theta \cdot \gamma(t)$ כאשר R_θ היא מטריצת הסיבוב המתאימה:

$$R_\theta = \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta & 0 \\ \sin\theta & \cos\theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

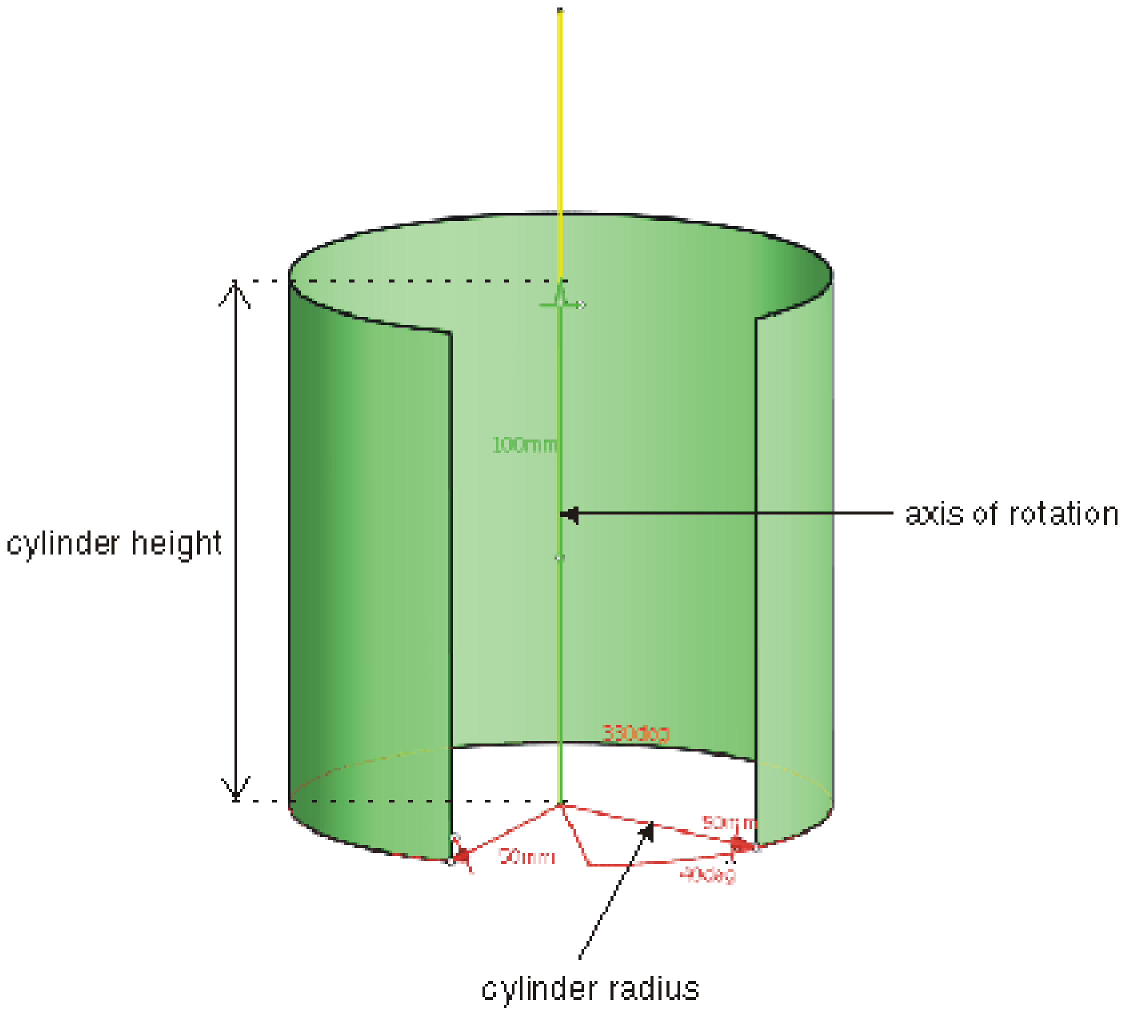
ולכן נקבל:

$$r(t, \theta) = \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta & 0 \\ \sin\theta & \cos\theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} f(t) \\ 0 \\ g(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} f(t)\cos\theta \\ f(t)\sin\theta \\ g(t) \end{pmatrix}$$

<u>לדוגמה:</u>

1. אם $\gamma(t)$ היא קו ישר המקביל לציר ה$-z$ נקבל גליל:

$$\gamma(t) = (a, 0, t) \Longrightarrow r(t, \theta) = (a\cos\theta, a\sin\theta, t)$$



2. אם $\gamma(t)$ היא קו ישר שאינו מקביל לציר z, נקבל חרוט; למשל:

$$\gamma(t) = (t, 0, t) \Longrightarrow r(t, \theta) = (t\cos\theta, t\sin\theta, t)$$

3. אם $\gamma(t)$ מעגל (עם מרכז a שבו $y = 0$ ורדיוס b), נקבל טורוס:

$$\gamma(t) = (a+b\cos t, 0, a+b\sin t) \Longrightarrow r(t, \theta) = ((a + b\cos t)\cos\theta, (a + b\cos t)\sin\theta, b\sin t)$$

טורוס מזכיר בצורתו גלגל ים (או שמא גלגל ים הוא המזכיר בצורתו טורוס?)

<u>תרגיל:</u>

יהי M משטח הסיבוב של העקומה $\gamma(s) = (f(s), 0, g(s))$. מצאו את התבנית היסודית הראשונה של M.

<u>פתרון:</u>

הפרמטריזציה של M היא:

$$r(s,\theta) = \begin{pmatrix} f(s)\cos\theta \\ f(s)\sin\theta \\ g(s) \end{pmatrix}$$

וקטורי הנגזרות הם:

$$r_\theta = (-f(s)\sin\theta, f(s)\cos\theta, 0), r_s = (f'(s)\cos\theta, f'(s)\sin\theta, g'(s))$$

נחשב את מקדמי המטריקה:

$$g_{11} = \langle r_s, r_s \rangle = (f'(s))^2 + (g'(s))^2 = \|\gamma'(s)\| = 1$$
$$g_{12} = g_{21} = \langle r_s, r_\theta \rangle = 0$$
$$g_{22} = \langle r_\theta, r_\theta \rangle = f^2(s)$$

ולכן:

$$G=\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & f^2\end{pmatrix}$$

נזכור ש**משטח מינימלי** הוא משטח שבו $H=0$ בכל נקודה.

<u>משפט:</u>

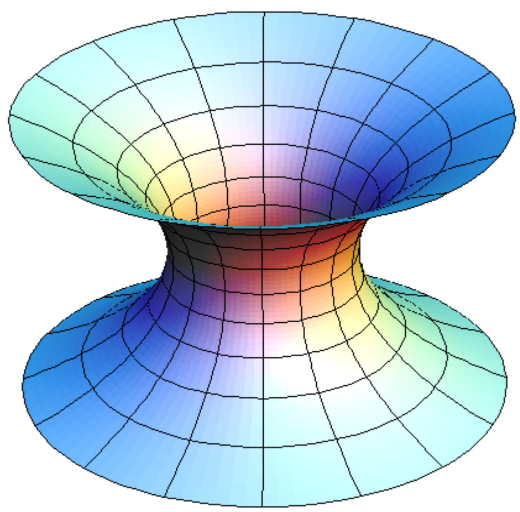
תהי β עקומה סגורה במרחב. המשטח ששטחו מינימלי מבין כל המשטחים ששפתם היא β, הוא משטח מינימלי.

<u>תרגיל:</u>

הוכיחו שהקטנואיד $(catenoid)$ שהוא משטח הסיבוב של העקומה $x=\cosh z$ הוא משטח מינימלי.

<u>פתרון:</u>

הקטנואיד נראה כך:



אם כן, נחשב את אופרטור הצורה S.

פרמטריזציה של העקומה היא:

$$\gamma(t)=(\cosh t,0,t)$$

ולכן פרמטריזציה של המשטח היא:

$$r(t,\theta)=(\cosh t\cos\theta,\cosh t\sin\theta,t)$$

לפני שנתחיל בגזירות ובבלגנים, נזכור ש:

$$\cosh t=\frac{e^t+e^{-t}}{2},\sinh t=\frac{e^t-e^{-t}}{2}$$

ובזהויות בסיסיות של הפונקציות ההיפרבולית, כגון:

$$(\cosh t)'=\sinh t,(\sinh t)'=\cosh t,1=\cosh^2 t-\sinh^2 t$$

וקטורי הנגזרות הם:

$$r_t=(\sinh t\cos\theta,\sinh t\sin\theta,1),r_\theta=(-\cosh t\sin\theta,\cosh t\cos\theta,0)$$

נחשב את מקדמי המטריקה:

$$g_{11}=\langle r_t,r_t\rangle=\sinh^2 t\cos^2\theta+\sinh^2 t\sin^2\theta+1=\sinh^2 t+1=\cosh^2 t$$
$$g_{12}=g_{21}=\langle r_t,r_\theta\rangle=0$$
$$g_{22}=\langle r_\theta,r_\theta\rangle=\cosh^2 t\sin^2\theta+\cosh^2 t\cos^2\theta=\cosh^2 t$$

ולכן:

$$G=\begin{pmatrix}\cosh^2 t & 0\\ 0 & \cosh^2 t\end{pmatrix}$$

כעת, נחשב את הנורמל:

$$r_t\times r_\theta=\begin{vmatrix} i & j & k\\ \sinh t\cos\theta & \sinh t\sin\theta & 1\\ -\cosh t\sin\theta & \cosh t\cos\theta & 0\end{vmatrix}=(-\cosh t\cos\theta,-\cosh t\sin\theta,\cosh t\sinh t)$$

לכן:

$$\|r_t \times r_\theta\| = \sqrt{\cosh^2 t\cos^2\theta + \cosh^2 t\sin^2\theta + \cosh^2 t\sinh^2 t} = \sqrt{\cosh^2 t\left(1+\sinh^2 t\right)} =$$

$$= \sqrt{\cosh^4 t} = \cosh^2 t$$

והנורמל הוא:

$$\vec{n} = \frac{r_t \times r_\theta}{\|r_t \times r_\theta\|} = \frac{1}{\cosh^2 t}(-\cosh t\cos\theta, -\cosh t\sin\theta, \cosh t\sinh t)$$

כלומר: $\vec{n} = \frac{1}{\cosh t}(-\cos\theta, -\sin\theta, \sinh t)$.

נחשב את וקטורי הנגזרות השניות:

$$r_{tt} = (\cosh t\cos\theta, \cosh t\sin\theta, 0)$$
$$r_{t\theta} = (-\sinh t\sin\theta, \sinh t\cos\theta, 0)$$
$$r_{\theta\theta} = (-\cosh t\cos\theta, -\cosh t\sin\theta, 0)$$

מכאן, נוכל לחשב את איברי המטריצה B:

$$b_{11} = \langle r_{tt}, \vec{n}\rangle = (\cosh t\cos\theta, \cosh t\sin\theta, 0)\cdot\tfrac{1}{\cosh t}(-\cos\theta, -\sin\theta, \sinh t) = -1$$
$$b_{21} = b_{12} = \langle r_{t\theta}, \vec{n}\rangle = (-\sinh t\sin\theta, \sinh t\cos\theta, 0)\cdot\tfrac{1}{\cosh t}(-\cos\theta, -\sin\theta, \sinh t) = 0$$
$$b_{22} = \langle r_{\theta\theta}, \vec{n}\rangle = (-\cosh t\cos\theta, -\cosh t\sin\theta, 0)\cdot\tfrac{1}{\cosh t}(-\cos\theta, -\sin\theta, \sinh t) = 1$$

ולכן:

$$B = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

נזכור ש: $S=G^{-1}B$, ולכן:

$$S=\begin{pmatrix}\cosh^2 t & 0\\ 0 & \cosh^2 t\end{pmatrix}^{-1}\begin{pmatrix}-1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-\frac{1}{\cosh^2 t} & 0\\ 0 & \frac{1}{\cosh^2 t}\end{pmatrix}$$

ולכן הע"ע של S הם: $k_{1,2}=\pm\frac{1}{\cosh^2 t}$, ואכן:

$$H=\frac{k_1+k_2}{2}=0$$

ולכן הקטנואיד הוא אכן משטח מינימלי.

*מומלץ להיכנס לויקיפדיה ולקרוא על הקשר בין הקטנואיד לבין ההליקואיד.

משטחים מסורגלים/סרגליים $(Ruled\ Surfaces)$**:**

משטח מסורגל הוא משטח עם פרמטריזציה מהצורה:

$$r(u,v)=\gamma(v)+u\cdot V(v)$$

כאשר γ עקומה (רגולרית) ו$-V$ שדה וקטורי.

אם ניקח v_0 קבוע, נקבל קו ישר מהצורה:

$$l(u)=\gamma(v_0)+u\cdot V(v_0)$$

כלומר, אם קובעים קוארדינטה אחת ומשתנים רק לפי האחרת, מקבלים קו ישר.

קווים ישרים אלו נקראים סרגלים של המשטח.

<u>לדוגמה:</u>

גליל הוא משטח מסורגל. פרמטריזציה של גליל היא:

$$r(u,v)=(a\cos v,a\sin v,u)=(a\cos v,a\sin v,0)+v\cdot(0,0,1)$$

<u>תרגיל:</u>

יהי $r(u,v)=\gamma(v)+u\cdot V(v)$ משטח מסורגל.

הוכיחו שהסעיפים הבאים שקולים:

1. $\vec{n}$ קבוע לאורך הסרגלים, כלומר $\vec{n}_u=0$.
2. $r_{uv}\in span\left\{r_u,r_v\right\}$.
3. $k=0$.

<u>פתרון:</u>

$1\Longleftarrow 2$:

אנו יודעים ש-$\vec{n}$ מאונך למישור הנפרש על ידי r_u,r_v כלומר ל-$span\left\{r_u,r_v\right\}$.

לכן, כדי להראות שאכן $r_{uv}\in span\left\{r_u,r_v\right\}$ מספיק להראות ש-$\vec{n}$ מאונך ל-r_{uv}.

אם כן, מכיוון ש-$\langle\vec{n},r_v\rangle=0$, אפשר לגזור לפי u ולקבל:

$$0=\frac{\partial}{\partial u}\left\langle\vec{n},r_v\right\rangle=\left\langle\vec{n}_u,r_v\right\rangle+\left\langle\vec{n},r_{uv}\right\rangle$$

מכיוון ש-$\vec{n}_u=0$, נקבל: $\langle\vec{n},r_{uv}\rangle=0$.

כמו שהסברנו זה מספיק לכך ש-$r_{uv}\in span\left\{r_u,r_v\right\}$.

$2\Longleftarrow 3$:

נתון: $r_{uv}\in span\left\{r_u,r_v\right\}$. לכן, מכיוון שהנורמל מאונך למישור הזה, $\langle\vec{n},r_{uv}\rangle=0$.

כמו כן, הפרמטריזציה של המשטח היא: $r(u,v)=\gamma(v)+u\cdot V(v)$ ולכן $r_{uu}=0$.

לכן, אם נחשב את איברי המטריצה B נקבל:

$$b_{11}=\langle r_{uu},\vec{n}\rangle=0$$
$$b_{21}=b_{12}=\langle r_{uv},\vec{n}\rangle=0$$

ולכן:

$$B=\begin{pmatrix}0&0\\0&b_{22}\end{pmatrix}$$

ואם כן:

$$k=\det S=\det\left(G^{-1}B\right)=\frac{\det B}{\det G}=0$$

$3 \Longleftarrow 1$:

נתון: $k=0$.

נשים לב לכך שמתקיים:

$$k=\det S=-\det J_{\vec{n}}=-\det\left(\vec{n}_u,\vec{n}_v\right)=0$$

מטריצה שדטרמיננטתה (כן אה) מתאפסת היא לא הפיכה, ולכן עמודותיה תלויות ליניארית, קרי:

$$\vec{n}_v=c\cdot\vec{n}_u$$

אנו יודעים שנורמל מאונך לוקטורי הנגזרות, כלומר: $\langle\vec{n}_u,r_v\rangle=\langle\vec{n}_u,r_u\rangle=0$. לכן:

$$0=\frac{\partial}{\partial u}\left\langle\vec{n},r_u\right\rangle=\left\langle\vec{n}_u,r_u\right\rangle+\left\langle\vec{n},r_{uu}\right\rangle=\left\langle\vec{n}_u,r_u\right\rangle$$

מכיוון ש-0 $r_{uu}=$, וגם:

$$0=\frac{\partial}{\partial v}\left\langle\vec{n},r_u\right\rangle=\left\langle\vec{n}_v,r_u\right\rangle+\left\langle\vec{n},r_{uv}\right\rangle$$

$$0=\frac{\partial}{\partial u}\left\langle\vec{n},r_v\right\rangle=\left\langle\vec{n}_u,r_v\right\rangle+\left\langle\vec{n},r_{uv}\right\rangle$$

משתי המשוואות האחרונות נקבל:

$$\left\langle\vec{n}_u,r_v\right\rangle=\left\langle\vec{n}_v,r_u\right\rangle$$

מתכונות המכפלה הפנימית ומהעובדה ש: $\vec{n}_v=c\cdot\vec{n}_u$ נקבל:

$$0=\left\langle\vec{n}_u,r_u\right\rangle=c\cdot\left\langle\vec{n}_u,r_u\right\rangle=\left\langle c\cdot\vec{n}_u,r_u\right\rangle=\left\langle\vec{n}_v,r_u\right\rangle=\left\langle\vec{n}_u,r_v\right\rangle$$

ולכן קיבלנו ש־$\vec{n}_u$ מאונך לשני הוקטורים r_u, r_v.

מצד שני, $\vec{n}_u \in T_{\vec{n}(p)}(M) = T_p(M) = span\{r_u, r_v\}$.

$\vec{n}_u$ מאונך לוקטורי הנגזרות (שהם בת"ל) וגם מאונך להם ולכן בהכרח $\vec{n}_u = 0$.

מקדמי כריסטופל $(Christoffel)$**:**

מהגדרת המכפלה הוקטורית, $\{r_u, r_v, \vec{n}\}$ הוא בסיס (עם אוריינטציה חיובית) של $\mathbb{R}^3$.

לכן, אפשר להביע את וקטורי הנגזרות השניות, r_{uu}, r_{uv}, r_{vv} כצירופים ליניאריים של איברי הבסיס:

$$r_{ij} = \Gamma_{ij}^1 r_1 + \Gamma_{ij}^2 r_2 + b_{ij}\vec{n}$$

כאשר $1 \leq i, j \leq 2$. לשם הנוחות, $u = 1, v = 2$ מבחינת האינדקסים.

b_{ij} הם איברי המטריצה B המגדירה את התבנית היסודית השנייה.

Γ_{ij}^k הם מקדמי כריסטופל.

לאחר לא מעט עבודה, מקבלים:

$$\Gamma_{ij}^k = \frac{1}{2} g^{km}\left(g_{mi,j} + g_{mj,i} - g_{ij,m}\right)$$

כאשר:

1. הסכום רץ על m, $m = 1, 2$.
2. g^{km} הם איברי G^{-1}, כלומר g^{11} הוא האיבר הימני למעלה ב־G^{-1}, למשל (כאשר G היא המטריקה).
3. בסימן $g_{ab,c}$ הסימן שמשמאל לפסיק הוא נגזרת ושני אלה שמימין לפסיק הם האינדקסים של האיבר. למשל, $g_{12,2}$ הנגזרת של g_{12} לפי המשתנה השני.
4. $1 \leq i, j, k \leq 2$, מה שנותן לנו 8 מקדמי כריסטופל.

הנוסחה נראית ארוכה ומפותלת, אך המטריצה G נוחה בדרך כלל והרבה מהמקדמים מתאפסים.

<u>לדוגמה:</u>

נחשב את מקדמי כריסטופל של המישור ההיפרבולי:

$$H = \left\{ \left(x, y\right) \in \mathbb{R}^2 : y > 0 \right) \right\}$$

עם המטריקה:

$$G = \frac{1}{y^2} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

לשם הנוחות, נגזור את כל המטריצה במכה, ונסמן זאת כך:

$$G_{,1} = \frac{\partial G}{\partial x} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, G_{,2} = -\frac{2}{y^3} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

בנוסף:

$$G^{-1} = y^2 \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

ולכן:

$$g^{11} = y^2, g^{12} = g^{21} = 0, g^{22} = y^2$$

$$g_{11,1} = g_{12,1} = g_{21,1} = g_{22,1} = 0$$

$$g_{11,2} = g_{22,2} = -\frac{2}{y^3}, g_{12,2} = g_{21,2} = 0$$

ואם כן:

$$\Gamma^1_{11} = \frac{1}{2}g^{11}\left(g_{11,1}+g_{11,1}-g_{11,1}\right)+\frac{1}{2}g^{12}\left(g_{21,1}+g_{21,1}-g_{11,2}\right)=0$$
$$\Gamma^1_{12} = \frac{1}{2}g^{11}\left(g_{12,1}+g_{11,2}-g_{12,1}\right)+\frac{1}{2}g^{12}\left(\ldots\right)=-\frac{1}{y}$$
$$\Gamma^1_{21} = -\frac{1}{y}$$
$$\Gamma^1_{22} = 0$$
$$\Gamma^2_{11} = -\frac{1}{y}$$
$$\Gamma^2_{12} = 0$$
$$\Gamma^2_{21} = 0$$
$$\Gamma^2_{22} = -\frac{1}{y}$$

השימוש של סמלי כריסטופל מופיע במשוואת של **קווים גיאודזיים:**

קו גיאודזי הוא עקומה $\gamma:[a,b]\to U$ כך ש: $\beta=r\circ\gamma$ ממזערת את המרחק בין כל שתי נקודות על תמונת β, והפרמטר של β הוא טבעי (כאשר $r:U\to M$ פרמטריזציה של המשטח).

במילים אחרות, איזו עקומה מישורית תיתן לנו את המרחק הקצר ביותר בין שתי נקודות במשטח אחרי שנרים אותה אל המשטח?

למשל, גיאודזים של ספירה הם מעגלים גדולים, כלומר המרחק הקצר ביותר בין שתי נקודות על הספירה הוא לאורך המעגל הגדול שמחבר את שתי הנקודות.

הרצון להתאמץ כמה שפחות - ללכת במסלול הקצר ביותר - נוכח כל הזמן בחיינו. אם נתבונן בדוגמה של הספירה, כך טסים מטוסים מנקודה מסוימת על כדור הארץ לנקודה השנייה - לאורך מעגל גדול. אם כן, מציאת הקווים הגיאודזיים היא בעיה משמעותית ונדרשים רבות לפתרונה.

אז איך מוצאים קווים גיאודזיים?

אם $\gamma(t)=\left(\gamma^1(t),\gamma^2(t)\right)$ היא עקומה מישורית ו־$\beta=r\circ\gamma$ (כאשר $r:U\to M$ ולכן $\beta:[a,b]\to M$ עקומה מרחבית על המשטח), אחרי שימוש מאומץ בכלל השרשרת ובמקדמי כריסטופל מקבלים:

$$\beta''=\sum_{i,j}\left((\gamma^1)''+\Gamma^1_{ij}(\gamma^i)'(\gamma^j)'+\left((\gamma^2)''+\Gamma^2_{ij}(\gamma^i)'(\gamma^j)'\right)+\left(b_{ij}(\gamma^i)'(\gamma^j)'\vec{n}\right)\right)$$

בעע. מבלי להיכנס לפרטים, כאשר β'' תלויה בנורמל בלבד, כלומר: $\beta'' = c \cdot \vec{n}$, נקבל עקומה גיאודזית.

אם כן, יש לנו שתי משוואת דיפרנציאליות על γ:

$$\begin{cases} (\gamma^1)'' + \Gamma^1_{ij}(\gamma^1)'(\gamma^2)' = 0 \\ (\gamma^2)'' + \Gamma^2_{ij}(\gamma^1)'(\gamma^2)' = 0 \end{cases}$$

לכן, כדי למצוא את הגיאודזים של משטח נפתור את המד"ר האלו.

משוואות אלו נקראות המשוואות הגיאודזיות.

<u>תרגיל:</u>

חשבו את הקווים הגיאודזיים של הגליל:

$$M = \left\{x^2 + y^2 = 1\right\}$$

חשבו גם את התבניות היסודיות הראשונה והשנייה, את אופרטור הצורה, את העקמומיות הראשיות, את עקמומיות גאוס ואת העקמומיות הממוצעת.

<u>פתרון:</u>

פרמטריזציה של הגליל היא:

$$r(u,v) = (\cos v, \sin v, u)$$

וקטורי הנגזרות הם:

$$r_u = (0,0,1), r_v = (-\sin v, \cos v, 0)$$

נחשב את מקדמי המטריקה:

$$g_{11} = \langle r_u, r_u \rangle = 1$$
$$g_{12} = g_{21} = \langle r_u, r_v \rangle = 0$$
$$g_{22} = \langle r_v, r_v \rangle = \sin^2 v + \cos^2 v = 1$$

ואם כן:

$$G = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

כעת, נחשב את הנורמל:

$$r_u \times r_v = \begin{vmatrix} i & j & k \\ 0 & 0 & 1 \\ -\sin v & \cos v & 0 \end{vmatrix} = (-\cos v, -\sin v, 0)$$

לכן:

$$\|r_u \times r_v\| = \sqrt{\cos^2 v + \sin^2 v} = 1$$

והנורמל הוא:

$$\vec{n} = \frac{r_u \times r_v}{\|r_u \times r_v\|} = (-\cos v, -\sin v, 0)$$

וקטורי הנגזרות השניות הם:

$$r_{uu} = 0, r_{uv} = 0, r_{vv} = (-\cos v, -\sin v, 0)$$

נחשב את איברי המטריצה B:

$$b_{11} = r_{uu} \cdot \vec{n} = 0$$
$$b_{21} = b_{12} = r_{uv} \cdot \vec{n} = 0$$
$$b_{22} = r_{vv} \cdot \vec{n} = \cos^2 v + \sin^2 v = 1$$

ולכן:

$$B = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

לכן:

$$S = G^{-1}B = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

לכן העקמומיות הראשיות הן $k_1 = 0, k_2 = 1$, ולכן גם עקמומיות גאוס שווה ל:

$$k = \det S = 0$$

והעקמומיות הממוצעת שווה ל:

$$H = \frac{1}{2} tr(S) = \frac{1}{2}$$

*שני כיווני ההתקדמות לאורך הגליל הם קו ישר ומעגל ברדיוס 1, שעקמומיות כל אחד מהם היא 0 ו-1 בהתאמה, כמו העקמומיות הראשיות.

כעת, מכיוון שהמטריצה G קבועה, לאחר שנגזור את איבריה בכל סדר שהוא נקבל 0. לכן, מקדמי כריסטופל כולם מתאפסים:

$$\Gamma_{ij}^{k} = 0$$

לכל $1 \leq i, j, k \leq 2$.

לכן, המשוואות הגיאודזיות הן:

$$\begin{cases} (\gamma^1)'' + \Gamma_{ij}^1 (\gamma^1)' (\gamma^2)' = (\gamma^1)'' = 0 \\ (\gamma^2)'' + \Gamma_{ij}^2 (\gamma^1)' (\gamma^2)' = (\gamma^2)'' = 0 \end{cases}$$

כלומר, הנגזרות השניות מתאפסות. נאטרגל פעמיים ונקבל:

$$\begin{cases} \gamma^1(t) = at + b \\ \gamma^2(t) = ct + d \end{cases}$$

ולכן $\gamma(t) = (b, d) + (a, c)t$, קו ישר.