משוואות דיפרנציאליות חלקיות 241 – 88

מתרגל: יעקב מורדכי.

מייל מתרגל: mordehay.yakov@gmail.com.

חומר עזר:

- ספר מומלץ: מבוא למשוואות דיפרנציאליות חלקיות, יהודה פינצ'ובר, טכניון.
- ביוטיוב, מצגות של פינצ'ובר מהטכניון.
- מערכי תרגול נמצאים ב – math wiki.

שעות קבלה: בתיאום מראש.

ציון תרגיל: 5% ש"ב, עבודת הגשה בנומריות 10%, 85% מבחן.

חזרה במד"ר

תזכורת: מד"ר ניתנת להפרדה –

$$y'(x) = f(x,y)$$

כאשר $f(x,y) = g(x)\cdot h(y)$, f ו – g פונקציות רציפות. את המד"ר נוכל לפתור באופן הבא:

$$y'(x) = \frac{dy}{dx}$$

$$\frac{dy}{dx} = g(x)\cdot h(y)$$

$$\frac{dy}{h(y)} = g(x)\,dx$$

נוכל לבצע אינטגרל ולקבל פתרון. אם אפשר, רצוי לחלץ את y.

תרגיל:

פתרו את המד"ר:

$$y' = \frac{x}{y^2+1} = x\cdot\frac{1}{y^2+1}$$

פתרון:

$$\frac{dy}{dx} = x\cdot\frac{1}{y^2+1}$$

$$(1+y^2)\,dy = x\,dx$$

נבצע אינטגרל:

$$\int (1+y^2)dy = \int x\,dx$$

$$y + \frac{y^3}{3} = \frac{x^2}{2} + \tilde{c}$$

$$\boxed{2y^3 + 6y - 3x^2 = c}$$

כאשר נסמן:

$$6\tilde{c} = c$$

■

<u>תרגיל:</u>

פתרו את המד"ר:

$$xe^{x^2} + y \cdot y' = 0$$

<u>פתרון:</u>

$$y \cdot y' = -xe^{x^2}$$

$$y \cdot \frac{dy}{dx} = -xe^{x^2}$$

$$y\,dy = -xe^{x^2}dx$$

נבצע אינטגרל:

$$\int y\,dy = \int -xe^{x^2}dx$$

$$\frac{y^2}{2} = -\frac{1}{2}\int 2xe^{x^2}dx = -\frac{1}{2}e^{x^2} + \tilde{c}$$

$$\boxed{y^2 = e^{x^2} + c}$$

צורה סתומה של הפתרון.

■

<u>תרגיל:</u>

פתרו את המד"ר:

$$y' = xy$$

<u>פתרון:</u>

$$\frac{dy}{dx} = xy$$

נחלק ב – y (נניח ש - $y \neq 0$):

$$\frac{1}{y}dy = x\,dx$$

נבצע אינטגרל:

$$\int \frac{1}{y}dy = \int x\,dx$$

$$\ln|y| = \frac{x^2}{2} + \tilde{c}$$

$$|y| = e^{\frac{x^2}{2}} + \underbrace{e^{\tilde{c}}}_{\text{נסמן } c}$$

$$\boxed{|y| = ce^{\frac{x^2}{2}}}$$

$$\boxed{y = \pm ce^{\frac{x^2}{2}}}$$

אם $y = 0$, נקבל $y' = 0$ ואם נציב במד"ר נקבל פסוק אמת. לכן:

$$y(x) = \begin{cases} ce^{\frac{x^2}{2}}, & y = 0 \\ 0, & y = 0 \end{cases}$$

■

הערה:

למציאת c נזדקק לתנאי התחלה.

תזכורת: מד"ר ליניארית מסדר I:

$$a(x) \cdot y' + b(x) \cdot y = c(x)$$

צורה סטנדרטית של מד"ר ליניארית מסדר I:

$$y' + \underbrace{\frac{b(x)}{a(x)}}_{P(x)}y = \underbrace{\frac{c(x)}{a(x)}}_{Q(x)}$$

$$(1)\quad \boxed{y'(x) + P(x) \cdot y(x) = Q(x)}$$

$$(2)\quad y = \underbrace{y_h}_{\substack{\text{פתרון כללי} \\ \text{להומוגני}}} + \underbrace{y_p}_{\substack{\text{פתרון פרטי} \\ \text{אחד}}}$$

אם $Q(x) =$, אז המד"ר נקראת גם הומוגנית.

$$y_h' + P(x)y_h = 0$$

$$\frac{dy_h}{dx} = -P(x)y_h$$

$$\int \frac{dy_h}{y_h} = \int -P(x)dx$$

$$\ln|y_h| = \int -P(x)dx + c$$

$$y_h = \underbrace{\pm A}_{k}\, e^{-\int P(x)dx}$$

לכן, הפתרון הכללי לחלק ההומוגני הוא –

$$\boxed{y_h = k \cdot e^{-\int P(x)dx}}$$

אם נציב את (2) ב - (1):

$$y_h' + y_p' + P(x)\cdot[y_h + y_p] = Q(x)$$

$$\underbrace{y_h' + P(x)y_h}_{=0} + y_p' + P(x)y_p = Q(x)$$

$$(3)\quad \boxed{y_p' + P(x)y_p = Q(x)}$$

$$(4)\quad y_p = k(x)\cdot e^{-\int P(x)dx}$$

נוסחה (4) היא וריאציית הפרמטרים.

נציב את (4) ב - (3):

$$k'(x)e^{-\int P(x)dx} - k(x)\cdot e^{-\int P(x)dx}\cdot P(x) + P(x)\cdot k(x)\cdot e^{-\int P(x)dx} = Q(x)$$

$$k'(x)e^{-\int P(x)dx} = Q(x)$$

$$\boxed{k'(x) = Q(x)e^{\int P(x)dx}}$$

$$\boxed{k(x) = \int \left[Q(x)e^{\int P(x)dx}\right] dx + c}$$

ואז –

$$y_p = \left(\int \left[Q(x)e^{\int P(x)dx}\right] dx\right) e^{-\int P(x)dx}$$

תרגיל:

פתרו את המד"ר:

$$y' = x + \frac{y}{x}$$

<u>פתרון:</u>

נכתוב - $y = y_h + y_p$.

$$y_h' = \frac{y_h}{x}$$

$$\frac{dy_h}{dx} = \frac{y_h}{x}$$

$$\frac{dy_h}{y_h} = \frac{1}{x}dx$$

$$\ln|y_h| = \ln|x| + \tilde{c}$$

$$y_h = c \cdot x$$

כעת –

$$y_p' = \frac{y_p}{x} + x$$

$$y_p = c(x) \cdot x$$

$$c'(x) \cdot x + c(x) \cdot 1 = \frac{c(x) \cdot x}{x} + x$$

$$c'(x) \cdot x = x$$

נחלק ב – x $(x \neq 0)$:

$$c'(x) = 1$$

$$c(x) = x$$

לכן –

$$y_p = c(x) \cdot x = x \cdot x = x^2$$

ובסה"כ –

$$\boxed{y = cx + x^2}$$

■

<u>תרגיל:</u>

פתרו את המד"ר:

$$y' \cos(x) - y \sin(x) = 1$$

<u>פתרון:</u>

נחלק ב - $\cos(x) \neq 0$:

$$y' - \tan(x)\, y = \frac{1}{\cos(x)}$$

$$P(x) = -\tan(x)$$

$$Q(x) = \frac{1}{\cos(x)}$$

פתרון הומוגני:

$$y_h' - \tan(x)\, y_h = 0$$

$$\frac{dy_h}{y_h} = \tan(x)\, dx$$

$$\ln|y_h| = \int \tan(x)\, dx + \tilde{c}$$

$$y_h(x) = ce^{\int \tan(x) dx}$$

נחשב את האינטגרל:

$$\int \tan(x)\, dx = -\int -\frac{\sin(x)}{\cos(x)} dx \underbrace{=}_{\substack{u=\cos x \\ du=-\sin x\, dx}} -\int \frac{1}{u} du = -\ln(u) = -\ln(cos(x)) = \ln\left(\frac{1}{cos(x)}\right)$$

לכן –

$$y_h = c \cdot e^{\ln\left(\frac{1}{cos(x)}\right)} = \frac{c}{\cos(x)}$$

פתרון פרטי (נשתמש בנוסחה):

$$y_p = \frac{\int \frac{1}{\cos(x)} e^{-\int \tan(x) dx} dx}{e^{-\int \tan(x) dx}} = \frac{\int \frac{1}{\cos(x)} e^{\ln|cos(x)|} dx}{e^{-\int \tan(x) dx}} = \frac{\int \frac{\cos(x)}{\cos(x)} dx}{e^{\ln|cos(x)|}} = \frac{x}{\cos(x)}$$

בסה"כ –

$$\boxed{y = \frac{c}{\cos(x)} + \frac{x}{\cos(x)}}$$

■

<u>תזכורת:</u> מד"ר מסדר שני עם מקדמים:

$$ay'' + by' + cy = 0$$

ניצב פתרון $y = e^{rx}$:

$$ar^2e^{rx} + bre^{rx} + ce^{rx} = 0$$

נחלק ב - $e^{rx} \neq 0$:

$$ar^2 + br + c = 0$$

פולינום אופייני או משוואה אופיינית.

<u>תזכורת:</u> בעיית שטורם ליוביל (SL) –

<u>בעיית שפה:</u>

$$\begin{cases} X''(x) + \lambda X(x) = 0 \\ X(0) = X(L) = 0 \end{cases}$$

$$0 \leq X \leq L$$

כאשר λ פרמטר.

<u>את בעיית השפה "בעיית שטורם ליוביל" נחלק ל – 3 מקרים:</u>

<u>מקרה 1:</u> עבור $\lambda = 0$:

$$X'' = 0$$

$$X' = c$$

$$\begin{cases} X(x) = cx + d \\ X(0) = X(L) = 0 \end{cases}$$

$$0 = X(0) = d \Rightarrow d = 0$$

$$0 = X(L) = cL$$

$$\underset{L>0}{\Longrightarrow} c = 0$$

ואז –

$$X(x) = 0$$

<u>מקרה 2:</u> עבור $\lambda > 0$:

$$\begin{cases} X'' + \lambda X = 0 \\ X(0) = X(L) = 0 \end{cases}$$

נציב פתרון $y = e^{rx}$:

$$r^2 e^{rx} + \lambda e^{rx} = 0$$

$$r^2 + \lambda = 0$$

$$r^2 = -\lambda$$

$$r = \pm\sqrt{-\lambda} = \pm i\sqrt{\lambda}$$

קיבלנו 2 פתרונות:

$$x_1 = e^{i\sqrt{\lambda}x}, x_2 = e^{-i\sqrt{\lambda}x}$$

$$X(x) = c_1 \cos\left(\sqrt{\lambda}x\right) + c_2 \sin\left(\sqrt{\lambda}x\right)$$

כעת –

$$\begin{cases} X(0) = X(L) = 0 \\ X(x) = c_1 \cos(\sqrt{\lambda}x) + c_2 \sin(\sqrt{\lambda}x) \end{cases}$$

נציב תנאי שפה:

$$0 = X(0) = c_1 \Rightarrow c_1 = 0$$

נקבל:

$$\begin{cases} X(x) = c_2 \sin(\sqrt{\lambda}x) \\ X(L) = 0 \end{cases}$$

$$c_2 \sin(\sqrt{\lambda}L) = 0$$

נניח ש - $c_2 \neq 0$, אחרת $X(x) = 0$:

$$\sin(\sqrt{\lambda}L) = 0$$

$$\sqrt{\lambda}L = n\pi$$

ע"ע:

$$\lambda_n = \left(\frac{n\pi}{L}\right)^2$$

פונקציות עצמיות:

$$X_n(x) = C_n \sin\left(\frac{n\pi}{L}x\right)$$

<u>הערה:</u> את הפונקציות העצמיות מוצאים ע"י הצבה של הערכים העצמיים בתוך הפתרון הכללי של $X(x)$.

<u>מקרה 3:</u> עבור $\lambda < 0$:

$$\begin{cases} X'' + \lambda X = 0 \\ X(0) = X(L) = 0 \end{cases}$$

פולינום אופייני:

$$k^2 + \lambda = 0$$

$$k^2 = -\lambda \Rightarrow k = \pm\sqrt{-\lambda}$$

קיבלנו 2 פתרונות:

$$x_1 = e^{\sqrt{-\lambda}x}, x_2 = e^{-\sqrt{-\lambda}x}$$

$$X(x) = c_1 e^{\sqrt{-\lambda}x} + c_2 e^{-\sqrt{-\lambda}x}$$

נציב תנאי שפה:

$$X(0) = c_1 + c_2 = 0 \Rightarrow c_2 = -c_1$$

לכן:

$$X(x) = c_1 e^{\sqrt{-\lambda}x} - c_1 e^{-\sqrt{-\lambda}x}$$

$$0 = X(L) = c_1 e^{\sqrt{-\lambda}L} - c_1 e^{-\sqrt{-\lambda}L}$$

$$c_1 \underbrace{\left(e^{\sqrt{-\lambda}L} - e^{-\sqrt{-\lambda}L}\right)}_{\neq 0} = 0$$

$$c_1 = 0 \Rightarrow c_2 = 0$$

ואז $X(x) = 0$.

לסיכום התרגיל:

$\lambda > 0$	$\lambda < 0$	$\lambda = 0$
$\lambda_n = \left(\frac{n\pi}{L}\right)^2$ $0 \neq X(x) = C_n \sin\left(\frac{n\pi x}{L}\right)$	$X(x) = 0$	$X(x) = 0$

■

חזרה באינפי

תרגיל:

הוכח ש - $z(x,y)=\varphi\left(\underbrace{x^2-y^2}_{t}\right)$ כאשר $\varphi(t)$ פונקציה גזירה המקיימת את המשוואה הבאה:

$$y\cdot\frac{\partial z}{\partial x}+x\cdot\frac{\partial z}{\partial y}=0$$

פתרון:

נחשב נגזרות חלקיות לפי כלל השרשרת:

$$\frac{\partial z}{\partial x}=\frac{\partial z}{\partial t}\cdot\frac{\partial t}{\partial x}=\varphi_t\cdot 2x$$

$$\frac{\partial z}{\partial y}=\frac{\partial z}{\partial t}\cdot\frac{\partial t}{\partial y}=\varphi_t\cdot(-2y)$$

לכן –

$$y\cdot\varphi_t\cdot 2x+x\cdot\varphi_t\cdot(-2y)=0$$

אכן פסוק אמת.

עבור $z(x,y)$ נעבור למשתנים t,s כך ש –

$$t(x,y)\ ,s(x,y)$$

נחשב את $z_x,z_y,z_{xx},z_{yy},z_{xy}$:

$$z_x=z_t\cdot t_x+z_s\cdot s_x$$

$$z_y=z_t\cdot t_y+z_s\cdot s_y$$

$$\begin{aligned}z_{xx}&=\frac{\partial}{\partial x}(z_t\cdot t_x)+\frac{\partial}{\partial x}(z_s\cdot s_x)\\&=(z_{tt}\cdot t_x+z_{ts}\cdot s_x)t_x+z_t\cdot t_{xx}+(z_{st}\cdot t_x+z_{ss}\cdot s_x)s_x+z_s\cdot s_{xx}\\&=z_{tt}\cdot t_x^2+2z_{ts}\cdot s_x\cdot t_x+z_{ss}\cdot s_x^2+z_s\cdot s_{xx}+z_t\cdot t_{xx}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}z_{xy}&=\frac{\partial}{\partial y}(z_t\cdot t_x)+\frac{\partial}{\partial y}(z_s\cdot s_x)\\&=\left(z_{tt}\cdot t_y+z_{ts}\cdot s_y\right)t_x+z_t\cdot t_{xy}+\left(z_{ss}\cdot s_y+z_{st}\cdot t_y\right)s_x+z_s\cdot s_{xy}\end{aligned}$$

z_{yy} בדומה.

■