1. תהי $f(x)$ פונקציה רציפה בקטע $[a,b]$. הראו כי

$$\lim_{x\to a}\int_a^x f(\mathrm{t})dt = 0$$

רמז: נוסחת ניוטון לייבניץ (ואז היזכרו כי כל פונקציה גזירה היא בפרט רציפה).

<u>פתרון:</u>

$$\int_a^x f(\mathrm{t})d\mathrm{t} = F(x) - F(a)$$

באשר $F(t)$ קדומה של $f(t)$ כלומר $F'(t) = f(t)$ (הקדומה קיימת כי $f(x)$ רציפה). כעת $F(t)$ גזירה לכן רציפה לכן:

$$\lim_{x\to a}\int_a^x f(\mathrm{t})d\mathrm{t} = \lim_{x\to a} F(x) - F(a) = F(a) - F(a) = 0$$

2. חשבו את הגבול הבא:

$$\lim_{x\to 0}\frac{\int_0^{x^2}\sin(t^2)\,dt}{x^6}$$

רמז: לופיטל.

<u>פתרון:</u>

לפי שאלה 1, המונה שואף לאפס. ברור שגם המכנה. לכן הגבול הוא מהצורה $\frac{0}{0}$ ונעשה לופיטל:

$$= \lim_{x\to 0}\frac{\frac{d}{dx}\int_0^{x^2} sin(t^2)dt}{6x^5}$$

לחישוב $\frac{d}{dx}\int_0^{x^2} sin(t^2)dt$ נשתמש במשפט היסודי. תהי $F(\mathrm{t})$ פונקציה קדומה של $sin(t^2)$ כלומר $F'(t) =$ $sin(t^2)$. אז

$$\frac{d}{dx}\int_0^{x^2} sin(t^2)dt = \left(F(x^2) - F(0)\right)' = F'(x^2)\cdot 2x - 0 = sin(x^4)\cdot 2x$$

נחזור לחישוב הגבול:

$$= \lim_{x\to 0}\frac{sin(x^4)\cdot 2x}{6x^5} = \frac{1}{3}\lim_{x\to 0}\frac{sin(x^4)}{x^4}$$

שוב לופיטל:

$$= \frac{1}{3}\lim_{x\to 0}\frac{cos(x^4)\cdot 4x^3}{4x^3} = \frac{1}{3}\lim_{x\to 0} cos(x^4) = \frac{1}{3}$$

3. חשבו את הגבול הבא:

$$\lim_{x\to 0}\frac{\int_0^{x^3}\arctan(t^6)\,dt}{x^{21}}$$

<u>פתרון:</u>

לפי שאלה 1, המונה שואף לאפס. ברור שגם המכנה. לכן הגבול הוא מהצורה $\frac{0}{0}$ ונעשה לופיטל:

$$=\lim_{x\to 0}\frac{\frac{d}{dx}\int_0^{x^3}\arctan(t^6)\,dt}{21x^{20}}$$

לחישוב $\frac{d}{dx}\int_0^{x^3}\arctan(t^6)\,dt$ נשתמש במשפט היסודי. תהי $F(\mathrm{t})$ פונקציה קדומה של $arctan(t^6)$ כלומר $F'(t)=arctan(t^6)$. אז

$$\frac{d}{dx}\int_0^{x^3}\arctan(t^6)\,dt=\left(F(x^3)-F(0)\right)'=F'(x^3)\cdot 3x^2-0=arctan(x^{18})\cdot 3x^2$$

נחזור לחישוב הגבול:

$$=\lim_{x\to 0}\frac{3x^2arctan(x^{18})}{21x^{20}}=\frac{3}{21}\lim_{x\to 0}\frac{arctan(x^{18})}{x^{18}}$$

זה עוד פעם $\frac{0}{0}$ ולופיטל:

$$=\frac{3}{21}\lim_{x\to 0}\frac{\frac{1}{1+x^{36}}\cdot 18x^{17}}{18x^{17}}=\frac{3}{21}\lim_{x\to 0}\frac{1}{1+x^{36}}=\frac{3}{21}$$

4. א. תהי $f(x)=\frac{e^x+e^{-x}}{2}$. הראו כי $1+(f'(x))^2=f(x)^2$.

ב. חשבו את אורך הגרף של הפונקציה $f(x)=\frac{e^x+e^{-x}}{2}$ בקטע $[a,b]$.

<u>פתרון:</u>

א. נחשב:

$$f'(x)=\frac{e^x-e^{-x}}{2}$$

לכן

$$1+f'(x)^2=1+\frac{e^{2x}-2+e^{-2x}}{4}=\frac{4+e^{2x}-2+e^{-2x}}{4}=\frac{e^{2x}+2+e^{-2x}}{4}=f(x)^2$$

ב. על סמך סעיף א',

$$\int_a^b\sqrt{1+f'(x)^2}\,dx=\int_a^b\frac{e^x+e^{-x}}{2}dx=\left[\frac{1}{2}(e^x-e^{-x})\right]_{\mathrm{a}}^{\mathrm{b}}=\frac{1}{2}\left(e^b-e^{-b}-e^a+e^{-a}\right)$$

5. תהי $f(x)$ פונקציה גזירה בכל R. הוכיחו כי לכל $M>0$ קיים קטע $[a,b]$ כך שאורך הגרף של $f(x)$ בקטע זה גדול מ-M.

רמז: $1+(f'(x))^2\geq 1$.

<u>פתרון:</u>

אורך הגרף של $f(x)$ בקטע $[a,b]$ הוא

$$\int_a^b\sqrt{1+\left(f'(x)\right)^2}\,dx\geq\int_a^b\sqrt{1}dx=\int_a^b dx=b-a$$

אז בהנתן $M>0$ נבחר קטע $[a,b]$ כלשהו שהאורך שלו גדול מ-M ונקבל את הדרוש. למשל נוכל לבחור את הקטע $[0,M+1]$.

6. חשבו את אורך הגרף של הפונקציה $f(x)=\ln\left(\frac{e^x+1}{e^x-1}\right)$ בקטע $[a,b]$.

רמז: הראו כי $f'(x)=\frac{-2e^x}{e^{2x}+1}$ לכן $\sqrt{1+(f'(x))^2}=\frac{e^{2x}+1}{e^{2x}-1}$. לחישוב האינטגרל השתמשו בהצבה $t=e^{2x}$.

<u>פתרון:</u>

כמו שהרמז אומר, לפי כללי גזירה יוצא $f'(x)=\frac{-2e^x}{e^{2x}+1}$ וכמו כן $\sqrt{1+(f'(x))^2}=\frac{e^{2x}+1}{e^{2x}-1}$ לכן נשאר לחשב את

$$\int_a^b\frac{e^{2x}+1}{e^{2x}-1}dx$$

נחשב את האינטגרל הלא מסוים:

$$\int\frac{e^{2x}+1}{e^{2x}-1}dx=\int\frac{\mathrm{t}+1}{\mathrm{t}-1}\frac{dt}{2t}=\frac{1}{2}\int\frac{\mathrm{t}+1}{t(t-1)}\mathrm{dt}=\int\frac{1}{\mathrm{t\text{-}1}}dt-\frac{1}{2}\int\frac{1}{t}dt=ln|t-1|-\frac{1}{2}ln|t|+C$$

$$=ln|e^{2x}-1|-\frac{1}{2}ln|e^{2x}|+C$$

כעת נחזור לחשב את האינטגרל המסוים

$$\int_a^b \frac{e^{2x}+1}{e^{2x}-1}dx = \left[ln|e^{2x}-1| - \frac{1}{2}ln|e^{2x}|\right]_{\mathrm{a}}^{\mathrm{b}} = ln\left|e^{2b}-1\right| - \frac{1}{2}ln\left|e^{2b}\right| - ln|e^{2a}-1| + \frac{1}{2}ln|e^{2a}|$$

וזהו אורך העקומה. אפשר קצת לפשט (לא חובה..)

$$= ln\left|\frac{e^{2b}-1}{e^{2a}-1}\right| + \text{a-b}$$

7. נסתכל על המשוואה $\int_0^x e^{-t^2}dt = x$.

א. וודאו כי $x = 0$ פתרון של המשוואה.

ב. הראו כי אין למשוואה פתרונות אחרים. (רמז: לפי מסקנה ממשפט רול)

<u>פתרון</u>

א. ראיתם בהרצאה כי $\int_{\mathrm{a}}^{\mathrm{a}} f(t)dt = 0$ (לחלופין אפשר להוכיח את זה) בפרט אצלנו צד שמאל הוא 0 עבור $x = 0$ וכך גם צד ימין.

ב. נגדיר את הפונקציה $f(x) = \int_0^x e^{-t^2}dt$ - x. נגזור לפי המשפט היסודי

$$f'(x) = e^{-x^2} - 1$$

הנגזרת מתאפסת רק בנקודה $x = 0$. כלומר יש לנגזרת שורש אחד כלומר לפי משפט רול לפונקציה המקורית יש לכל היותר שני שורשים. אבל כבר ראינו ש-$x = 0$ שורש לכן יש לכל היותר שורש אחד נוסף. אבל זו סתירה כי אם $a \neq 0$ הוא שורש אז גם $-a$ הוא שורש, כי

$$\int_0^{\mathrm{-a}} e^{-t^2}dt = -\int_{\mathrm{-a}}^{0} e^{-t^2}dt = -\int_0^{\mathrm{a}} e^{-t^2}dt$$

(המעבר השמאלי נכון תמיד; המעבר הימני כי e^{-t^2} פונקציה זוגית.)

<u>פתרון אחר:</u>

שוב נגדיר את הפונקציה $f(x) = \int_0^x e^{-t^2}dt$ - x ונגזור לפי המשפט היסודי ונקבל $f'(x) = e^{-x^2} - 1$.

נשים לב כי הנגזרת מתאפסת רק בנקודה $x = 0$ ובכל נקודה אחרת היא שלילית.
לפי הכללה של משפט המונוטוניות, אם הנגזרת היא תמיד שלילית חוץ ממספר סופי של נקודות בה היא מתאפסת, אז הפונקציה יורדת. כלומר $f(x)$ יורדת בפרט היא חותכת את ציר ה-x לכל היותר פעם אחת.