תרגול 13

17 אוגוסט, 2016

נגזרות :

נגזרת קדמית ($o(h)$) –

$$f'(x) \approx \frac{f(x+h)-f(x)}{h}$$

נגזרת אחורית ($o(h)$) –

$$f'(x) \approx \frac{f(x)-f(x-h)}{h}$$

נגזרת מרכזית ($o(h^2)$) –

$$f'(x) \approx \frac{f(x+h)-f(x-h)}{2h}$$

דוגמה:

חשב את הנגזרת $f(x) = xsin(x)$ בנק' $x = 0.5$ – $h = 0.01$, $h = 0.1$.

למשל נגזרת קדמית:

$$h = 0.1 => f'(0.5) \approx \frac{f(0.5+0.1)-f(0.5)}{0.1} = 0.9907$$

$$h = 0.01 => f'(0.5) \approx \frac{f(0.5+0.01)-f(0.5)}{0.01} = 0.9257$$

התשובה האמיתית הינה 0.9182.

נגזרת מרכזית:

$$h = 0.1 => f'(0.5) \approx \frac{f(0.5+0.1)-f(0.5-0.1)}{2*0.1} = \frac{f(0.6)-f(0.4)}{0.2} = 0.91509$$

$$h = 0.01 => f'(0.5) = \frac{f(0.5+0.01)-f(0.5-0.01)}{2*0.01} = \frac{f(0.51)-f(0.49)}{0.02} = 0.9182$$

תרגיל:

חישוב נגזרת ע"י גזירת פולינום לגרנז':

x	0.4	0.6	0.7
y	3.3836	4.2442	4.7275

$$f'(0.6) = ?$$

תרגול 13

17 אוגוסט, 2016

כדי שנוכל לחשב את הנגזרת בנק' כלשהי ע"י שימוש בפיתוח לגרנז' נצטרך שהיא תהיה נק' דגימה.

<u>פתרון:</u>

3 נק' דגימה ולכן אנו צריכים - l_0, l_1, l_2.

$$l_0(x) = \frac{(x-x_1)(x-x_2)}{(x_0-x_1)(x_0-x_2)} => l_0{}'(x) = \frac{2x-x_1-x_2}{(x_0-x_1)(x_1-x_2)}$$

$$l_1(x) = \frac{(x-x_0)(x-x_2)}{(x_1-x_0)(x_1-x_2)} => l_1'(x) = \frac{2x-x_0-x_2}{(x_1-x_0)(x_1-x_2)}$$

$$l_2(x) = \frac{(x-x_0)(x-x_1)}{(x_2-x_0)(x_2-x_1)} => l_2'(x) = \frac{2x-x_0-x_1}{(x_2-x_0)(x_2-x_1)}$$

$$P_2(x) = \sum_{i=0}^{2} \underbrace{f(x_i)}_{\text{קבועים}} * l_i(x) = f(x_0)l_0'(x) + f(x_1)l_1'(x) + f(x_2)l_2'(x)$$

$$f'(0.6) = 3.3836l_0'(0.6) + 4.2442l_1'(0.6) + 4.7275l_2'(0.6) = 4.6227.$$

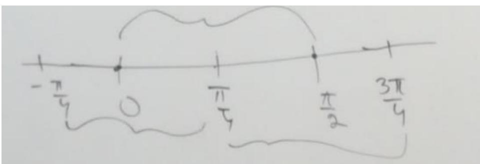
■

מה קורה כאשר נרצה לחשב נגזרת בנקודה שהיא לא נקודת דגימה?

$$f(x) = xsin(x)$$

נניח כי $0, \frac{\pi}{2}$ נק' הדגימה באמצעות פולינום לגרנז'.

$$f'(0.5) = ?$$



$0.5 \in [-\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{4}]$ נבנה את פולינום לגרנז' שעובר דרך הנק' $-\frac{\pi}{4}, 0, \frac{\pi}{4}$, נגזור את הפולינום $P_2(x)$, כלומר נגזור - $f'(0.5) \approx P_2{}'(0.5)$.

תרגול 13

אקסטרפולציה של ריצ'רדסון

$$\underbrace{f_h'(x)}_{Tv} = \underbrace{\frac{f(x+h)-f(x-h)}{2h}}_{Av\text{:קירוב}} - \underbrace{ch^2}_{\text{שגיאה}}$$

$$\underbrace{f_{\frac{h}{2}}'(x)}_{Tv} = \underbrace{\frac{f\left(x+\frac{h}{2}\right)-f(x-\frac{h}{2})}{h}}_{Av\text{:קירוב}} - \underbrace{\frac{c}{4}h^2}_{\text{שגיאה}}$$

$$+\begin{cases} Tv = Av_h - ch^2 \\ Tv = Av_{\frac{h}{2}} - \frac{c}{4}h^2 \quad \backslash * (-4) \end{cases}$$

נקבל ש –

$$-3Tv = -4Av_{\frac{h}{2}} + Av_h$$

$$-3Tv = -Av_{\frac{h}{2}} - 3Av_{\frac{h}{2}} + Av_h \quad \backslash : -3$$

$$\boxed{Tv = Av_{\frac{h}{2}} + \frac{Av_{\frac{h}{2}} - Av_h}{3}}$$

יש לזה שארית לגרנז' של $o(h^4)$.

$$Av = \frac{f(x+h)-f(x-h)}{2h}$$

$$Tv = f'(x_0)$$

כאשר x_0 הנקודה המבוקשת.

תרגיל:

נתון –

$$f(x) = x^3\cos(x)\ , x = 2.3\ , h = 1 => \frac{h}{2} = \frac{1}{2}$$

$$Av_1 = \frac{f(2.3+1)-f(2.3-1)}{2} = -18.0374$$

$$Av_{\frac{1}{2}} = \frac{f\left(2.3+\frac{1}{2}\right)-f(2.3-\frac{1}{2})}{1} = -19.3586$$

ולכן –

$$\underbrace{f'(2.3)}_{Tv} = -19.3586 + \frac{-19.3856 + 18.0374}{3} = -19.79904$$

התשובה האמיתית הינה -19.648

■

<u>הערה:</u>

ידוע שלפי גזירה נומרית מתקיים –

$$f(x+h) = f(x) + hf'(x) + \frac{h^2}{2}f''(x) + \frac{h^3}{3!}f^{(3)}(x) + \frac{h^4}{4!}f^{(4)} + \cdots$$

וגם -

$$f(x-h) = f(x) - hf'(x) + \frac{h^2}{2}f''(x) - \frac{h^3}{3!}f^{(3)}(x) + \frac{h^4}{4!}f^{(4)}(x) + \cdots$$

מכאן, אם נחסר את שתי המשוואות אז נשים לב כי החזקות הזוגיות של h מתבטלות.

אקסטרפולציה של ריצ'רדסון:

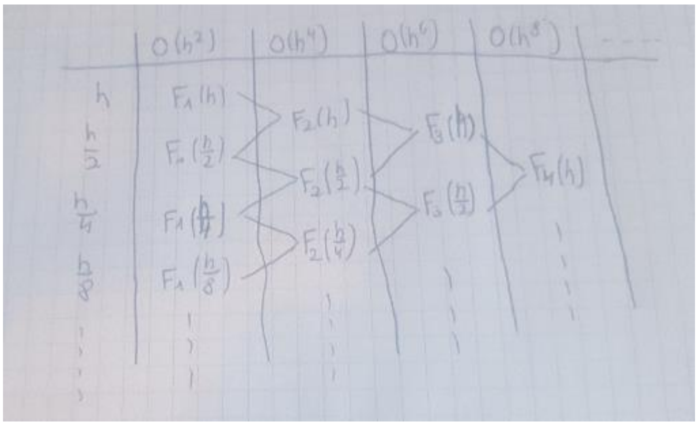
$$F_1(h) = Q + c_1h^2 + c_2h^4 + c_3h_6 + \cdots$$

$$\boxed{F_{j+1}(h) = F_j\left(\frac{h}{2}\right) + \frac{F_j\left(\frac{h}{2}\right) - F_j(h)}{4^j - 1}}$$

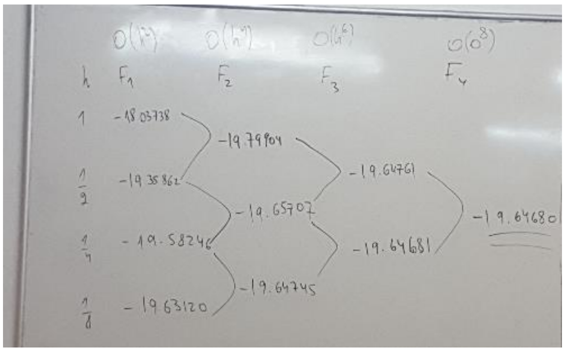
עבור $j = 0,1,\ldots$, כאשר לקירוב יש רק שגיאות זוגיות.

ממקודם עבור $j = 1$ נקבל -

$$Tv = Av_{\frac{h}{2}} + \frac{Av_{\frac{h}{2}} - Av_h}{3}$$



לדוגמה:



$$\underbrace{F_1(h)}_{\text{קירוב}} = \underbrace{Q}_{\text{שגיאה}} + k_1 h + k_2 h^2 + k_3 h^3 + \cdots$$

כאשר לקירוב נשאר כל החזקות:

$$\boxed{F_{j+1}(h) = F_j\left(\frac{h}{2}\right) + \frac{F_j\left(\frac{h}{2}\right) - F_j(h)}{2^j - 1}}$$

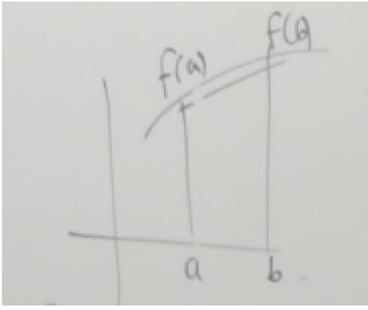
עבור $j = 0,1, \ldots$.

תרגול 13

אינטגרציה נומרית:

שיטת ניוטון קוטס:

כלל טרפז פשוט –



$$\int_a^b f(x)dx \approx \left[\frac{f(a)+f(b)}{2}\right] * (b-a)$$

כאשר השגיאה בשיטה זו –

$$E \leq -\frac{h^3}{12} * |f''(c)|$$

כאשר $f''(c)$ מקבלת מקסימום בקטע $[a,b]$.

כלל טרפז מוכלל -

$$h = \frac{b-a}{n}$$

כאשר יש n קטעים.

$$f(x)dx \approx \frac{h}{2}\left[f(a) + 2\left(\sum_{i=1}^{n-1} f(a+ih)\right) + f(b)\right]$$

נגדיר –

נקודות שריג $x_i = a + ih\, , i = 0, \dots, n$

$$x_0 = a\, , x_1 = a + h\, , \dots$$

ולפי שיטה זו החסם –

$$E_n \leq \frac{(b-a)^3}{12n^2} * |f''(c)|$$

$f''(x)$ מקבלת מקסימום בנקודה $c \in [a,b]$.

תרגול 13

17 אוגוסט, 2016

<u>כלל סימפסון פשוט:</u>

$$x_0 = a\,, x_1 = \frac{a+b}{2}\,, x_2 = b$$

$$f(a)\,, \qquad f\left(\frac{a+b}{2}\right)\,, \qquad f(b)$$

בונים את הפולינום של לגרנז' ע"י $a, \frac{a+b}{2}, b$. אינטגרל הפולינום נותן את כלל סימפסון.

$$I = \frac{h}{3}\left[f(a) + 4f\left(\frac{a+b}{2}\right) + f(b)\right]$$ כלל סימפסון

כאשר $h = \frac{b-a}{2}$.

השגיאה –

$$E \le \frac{1}{90}\left(\frac{b-a}{2}\right)^5 * \left|f^{(4)}(c)\right|$$

$f^{(4)}(x)$ מקבלת מקסימום ב - $c \in [a,b]$.

<u>הערה:</u>

חייב תמיד מס' זוגי של קטעים!!!

<u>כלל סימפסון המורכב:</u>

$$I = \frac{h}{3}[f(a) + 4f(x_1) + 2f(x_2) + \cdots + 4f(x_{2n-1}) + f(b)]$$

כאשר - $h = \frac{b-a}{2m}$, $2m$ מס' הקטעים (שלוש נקודות מגדירות קטע אחד, כלומר בהינתן x_0, x_1, x_2 נקבל ש- $m = 1$).

והשגיאה:

$$E_n \le \frac{(b-a)^5}{180n^4} * |f^{(4)}(c)|$$

כאשר $f^{(4)}(x)$ מקבלת מקסימום ב - $c \in [a,b]$.