פתרון מועד א' גיאומטריה תשע"ו

24 ביולי 2016

1. יהי $M \subset \mathbb{R}^3$ משטח המוגדר על ידי הגרף של $z = f(x,y)$, כאשר:

$$f(x,y) = 3x^2 + 8xy - 3y^2$$

יהי (e_1, e_2, e_3) הבסיס הסטנדרטי של $\mathbb{R}^3$.

א. מצאו את מטריצת ההסיאן של f בראשית הצירים.

פתרון:

נגזור את f:

$$f_x = 6x + 8y, f_y = 8x - 6y$$

$$f_{xx} = 6, f_{xy} = 8, f_{yy} = -6$$

ולכן:

$$H_f = \begin{pmatrix} 6 & 8 \\ 8 & -6 \end{pmatrix}$$

בכל נקודה, ובפרט בראשית הצירים.

ב. יהיו λ_i הערכים העצמיים של H_f $(i = 1, 2)$.

יהי v_i וקטור עצמי במישור xy השייך לערך העצמי λ_i.

נגדיר מישור $P_i \subset \mathbb{R}^3$ הנפרש על ידי v_i ועל ידי e_3.

נגדיר עקומה $\gamma_i \subset \mathbb{R}^3$ על ידי $\gamma_i = P_i \cap M$.

מצאו את העקמומיות של העקומות γ_i.

פתרון:

נמצא את הערכים העצמיים:

$$\lambda_1 \lambda_2 = \det H_f = -100, \lambda_1 + \lambda_2 = trH_f = 0$$

ולכן $\lambda_1 = -10, \lambda_2 = 10$.
נמצא את הוקטורים העצמיים. עבור λ_1:

$$\begin{pmatrix} 6 & 8 \\ 8 & -6 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix} = -10 \cdot \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix}$$

כלומר:

$$\begin{cases} 6v_1 + 8v_2 = -10v_1 \\ 8v_1 - 6v_2 = -10v_2 \end{cases}$$

כלומר $v_2 = -2v_1$, ואפשר לבחור:

$$v = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix}$$

עבור λ_2:

$$\begin{cases} 6v_1 + 8v_2 = 10v_1 \\ 8v_1 - 6v_2 = 10v_2 \end{cases}$$

כלומר $v_1 = 2v_2$, ואפשר לבחור:

$$v = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

המישור P_1 נפרש על ידי הוקטורים:

$$(1, -2, 0), (0, 0, 1)$$

נמצא את משוואת המישור, $Ax + By + Cz + D = 0$.
מכיוון שהמישור עובר בראשית הצירים, $D = 0$. כעת:

$$\vec{n} = (A, B, C)$$

ומצד שני:

$$\vec{n} = \begin{vmatrix} i & j & k \\ 1 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = (-2, -1, 0)$$

ולכן המישור P_1 מוגדר על ידי המשוואה:

$$-2x-y=0 \Longrightarrow y=-2x$$

נמצא את עקומת החיתוך γ_1 בצורה סתומה.
העקומה נמצאת גם במישור P_1 וגם על המשטח M ולכן מקיימת את שתי המשוואות:

$$\begin{cases} y=-2x \\ z=3x^2+8xy-3y^2 \end{cases}$$

ולכן: $z=-25x^2$. זו פרבולה. אפשר למצוא את העקמומיות על ידי נוסחת בייטמן:

$$F(x,z)=z+25x^2=0$$

הנגזרות החלקיות הן:

$$F_z=1, F_x=50x$$

$$F_{zz}=0, F_{zx}=0, F_{xx}=50$$

ולכן:

$$k=\frac{\left|50\cdot 1^2-0+0\right|}{\left(1+2500x^2\right)^{\frac{3}{2}}}$$

בראשית $x=0$ ולכן $k=50$.
באותה הדרך מוצאים עקמומיות ל־γ_2.
ג. חשבו את העתקת וויינגרטן של M בראשית הצירים ואת עקמומיות גאוס של M בראשית הצירים.
<u>פתרון:</u>
פרמטריזציה של המשטח היא:

$$r(x,y)=(x,y,f(x,y))$$

ולכן:

$$r_x = (1, 0, f_x)\,, r_y = (0, 1, f_y)$$

ולכן המטריקה היא:

$$\begin{pmatrix} 1+f_x^2 & f_x f_y \\ f_x f_y & 1+f_y^2 \end{pmatrix}$$

נחשב את הנורמל:

$$r_x \times r_y = \begin{vmatrix} i & j & k \\ 1 & 0 & f_x \\ 0 & 1 & f_y \end{vmatrix} = (-f_x, -f_y, 1)$$

הנורמה היא:

$$\|r_x \times r_y\| = \sqrt{1+f_x^2+f_y^2}$$

ולכן:

$$\vec{n} = \frac{r_x \times r_y}{\|r_x \times r_y\|} = \frac{1}{\sqrt{1+f_x^2+f_y^2}}\,(-f_x, -f_y, 1)$$

נחשב את וקטורי הנגזרות השניות:

$$r_{xx} = (0, 0, f_{xx})\,, r_{yx} = (0, 0, f_{xy})\,, r_{yy} = (0, 0, f_{yy})$$

לכן:

$$L_{11} = r_{xx} \cdot \vec{n} = \frac{f_{xx}}{\sqrt{1+f_x^2+f_y^2}}$$

$$L_{12} = L_{21} = r_{xy} \cdot \vec{n} = \frac{f_{xy}}{\sqrt{1+f_x^2+f_y^2}}$$

$$L_{22} = r_{yy} \cdot \vec{n} = \frac{f_{yy}}{\sqrt{1+f_x^2+f_y^2}}$$

ולכן התבנית היסודית השנייה היא:

$$B=\frac{1}{\sqrt{1+f_x^2+f_y^2}}\begin{pmatrix} f_{xx} & f_{xy} \\ f_{xy} & f_{yy} \end{pmatrix}$$

המטריצה ההופכית של המטריקה היא:

$$G^{-1}=\left(1+f_x^2+f_y^2\right)\begin{pmatrix} 1+f_y^2 & -f_xf_y \\ -f_xf_y & 1+f_x^2 \end{pmatrix}$$

בראשית, מתקיים:

$$f_x=f_y=0$$

$$f_{xx}=6, f_{xy}=8, f_{yy}=-6$$

ולכן:

$$G^{-1}=\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, B=\begin{pmatrix} 6 & 8 \\ 8 & -6 \end{pmatrix}$$

ולכן:

$$W=-G^{-1}B=-\begin{pmatrix} 6 & 8 \\ 8 & -6 \end{pmatrix}$$

לפיכך: $K=-100$.

ד. חשבו את העקמומיות הממוצעת של M בראשית הצירים.

<u>פתרון:</u>

$H=\frac{1}{2}trW$, ולכן מהסעיף הקודם $H=0$.

2. נתון המשטח $r:U\to M$, כאשר $U=\left\{(x,y)\in\mathbb{R}^2|y>0\right\}$, ונתונה המטריקה:

$$G=\frac{1}{y^2}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

א. מצאו את אורך העקומות $\beta_i=r\circ\gamma_i$ במקרים הבאים:

1. $\gamma_1(t)=(A\cos t, A\sin t)$ כאשר $t\in\left[\frac{\pi}{3},\frac{2\pi}{3}\right]$.

<u>פתרון:</u>

המטריקה כבר נתונה לנו.

וקטור הנגזרות של העקומה הוא: $\gamma_1'(t) = (-A\sin t, A\cos t)$ ולכן:

$$L(\beta_1) = \int\limits_{\frac{\pi}{3}}^{\frac{2\pi}{3}} \sqrt{\begin{pmatrix} -A\sin t & A\cos t \end{pmatrix} \frac{1}{(A\sin t)^2} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -A\sin t \\ A\cos t \end{pmatrix}} dt =$$

$$= \int\limits_{\frac{\pi}{3}}^{\frac{2\pi}{3}} \sqrt{\frac{1}{(A\sin t)^2} \cdot \left(A^2\sin^2 t + A^2\cos^2 t\right)} dt = \int\limits_{\frac{\pi}{3}}^{\frac{2\pi}{3}} \sqrt{\frac{1}{\sin^2 t}} dt = \int\limits_{\frac{\pi}{3}}^{\frac{2\pi}{3}} \frac{1}{\sin t} dt$$

את האינטגרל הזה אפשר לחשב בעזרת ההצבה האוניברסלית $x = \tan\frac{t}{2}$ ואפשר ללכת עם ולהרגיש בלי, כך:

$$\int\limits_{\frac{\pi}{3}}^{\frac{2\pi}{3}} \frac{1}{\sin t} dt = \int\limits_{\frac{\pi}{3}}^{\frac{2\pi}{3}} \frac{1}{2\sin\frac{t}{2}\cos\frac{t}{2}} \cdot \frac{\cos\frac{t}{2}}{\cos\frac{t}{2}} dt = \int\limits_{\frac{\pi}{3}}^{\frac{2\pi}{3}} \frac{1}{\tan\frac{t}{2}} \cdot \frac{1}{2\cos^2\frac{t}{2}} dt = \left(\ln\left(\tan\frac{t}{2}\right)\right)_{t=\frac{\pi}{3}}^{t=\frac{2\pi}{3}} = \ln 3$$

וזהו האורך של β_1.

2. $\gamma_2(t) = (A\cos t, A\sin t)$ כאשר $t \in [0,\pi]$.

<u>פתרון:</u>

הפרמטריזציה זהה לזו שבתת־סעיף 1, ורק הגבולות משתנים, ולכן:

$$L(\beta_2) = \left(\ln\left(\tan\frac{t}{2}\right)\right)_{t=0}^{t=\pi} = \infty$$

כלומר, חצי הקשת העליונה של המעגל הופכת לעקומה באורך אינסופי, בעוד ששישית הקשת העליונה של המעגל הופכת לעקומה באורך $\ln 3$.

3. $\gamma_3(t) = (1,t)$ כאשר $t \in [0,1]$.

<u>פתרון:</u>

וקטור הנגזרות של העקומה הוא $\gamma_3'(t) = (0,1)$ ולכן:

$$L(\beta_3) = \int\limits_0^1 \sqrt{\begin{pmatrix} 0 & 1 \end{pmatrix} \frac{1}{(t)^2} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}} dt = \int\limits_0^1 \sqrt{\frac{1}{t^2}} dt = (\ln t)_{t=0}^{t=1} = \infty$$

אם כן, גם קטע (מקביל לציר ה־y) הופך לעקומה באורך אינסופי.

ב. חשבו את השטח של $r \circ \Omega$ כאשר:

$$\Omega = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 | x \in \left(-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right), x^2+y^2 > 1\right\}$$

פתרון:

נשתמש בנוסחה: $\iint_{\varphi(\Omega)} dS = \iint_\Omega \sqrt{\det G}dxdy$.

מתקיים:

$$\sqrt{\det G} = \sqrt{\begin{vmatrix} \frac{1}{y^2} & 0 \\ 0 & \frac{1}{y^2} \end{vmatrix}} = \frac{1}{y^2}$$

מהו התחום Ω שלנו? $\Omega = \left\{-\frac{1}{2} < x < \frac{1}{2}, \sqrt{1-x^2} < y < \infty\right\}$ ולכן:

$$S\left(r\circ\Omega\right) = \int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} \int_{\sqrt{1-x^2}}^{\infty} \frac{1}{y^2}dydx = \int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} \left(\frac{1}{y}\right)_{y=\sqrt{1-x^2}}^{y=\infty} dx = \int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}dx =$$

$$= \left(\arcsin x\right)_{x=-\frac{1}{2}}^{x=\frac{1}{2}} = \frac{\pi}{6} + \frac{\pi}{6} = \frac{\pi}{3}$$

3. מצאו נקודה או נקודות (אם קיימות) בהן עקמומיות העקומות הבאות היא מקסימלית.

א. $x - y^2 = 0$.

פתרון:

נשתמש בנוסחת בייטמן כדי למצוא את העקמומיות, ולאחר מכן נמצא לה מקסימום.

הפונקציה F היא: $F\left(x,y\right) = y - x^2 = 0$. כעת:

$$F_x = -2x, F_y = 1$$

$$F_{xx} = -2, F_{xy} = 0, F_{yy} = 0$$

ולכן:

$$|k| = \frac{\left|F_{xx}F_y^2 - 2F_{xy}F_xF_y + F_{yy}F_x^2\right|}{\left(\sqrt{F_x^2 + F_y^2}\right)^3} = \frac{|-2|}{\left(\sqrt{4x^2+1}\right)^3} = \frac{2}{\left(4x^2+1\right)^{\frac{3}{2}}}$$

וקל לראות שהעקמומיות המקסימלית מתקבלת כאשר $x = 0$, כלומר בנקודה $(0,0)$.

ב. $xy = 1, x > 0$.

פתרון:

הפונקציה F היא: $F\left(x,y\right) = xy - 1 = 0$. כעת:

$$F_x = y, F_y = x$$

$$F_{xx}=F_{yy}=0, F_{xy}=1$$

ולכן:

$$k=\frac{|-2xy|}{\left(x^{2}+y^{2}\right)^{\frac{3}{2}}}=\frac{2}{\left(x^{2}+\frac{1}{x^{2}}\right)^{\frac{3}{2}}}=\frac{2x^{3}}{\left(x^{4}+1\right)^{\frac{3}{2}}}$$

מכיוון שעל העקומה $y=\frac{1}{x}$ ו-x חיובי.
אם גוזרים ומשווים ל-0 רואים שהמקסימום מתקבל כאשר $x=1$, כלומר בנקודה $(1,1)$.

ג. $3x^2+4y^2=1$.

<u>פתרון:</u>

הפונקציה F היא: $F(x,y)=3x^2+4y^2-1=0$. כעת:

$$F_x=6x, F_y=8y$$

$$F_{xx}=6, F_{yy}=8, F_{xy}=0$$

ולכן:

$$k=\frac{\left|6\cdot 64y^{2}+8\cdot 36x^{2}\right|}{\left(64y^{2}+36x^{2}\right)^{\frac{3}{2}}}=\frac{8\cdot 12\cdot\left(4y^{2}+3x^{2}\right)}{\left(16y^{2}+12\cdot\left(4y^{2}+3x^{2}\right)\right)^{\frac{3}{2}}}=\frac{96}{\left(16y^{2}+12\right)^{\frac{3}{2}}}$$

והמקסימום מתקבל כאשר $y=0$, כלומר בנקודות $\left(-\frac{1}{\sqrt{3}},0\right),\left(\frac{1}{\sqrt{3}},0\right)$ (וזה הגיוני מכיוון שהעיקול באליפסה "הכי חד" בדיוק בחיתוך עם ציר ה-x).

ד. $y=\ln x$.

<u>פתרון:</u>

הפונקציה F היא: $F(x,y)=\ln x-y=0$. כעת:

$$F_x=\frac{1}{x}, F_y=-1$$

$$F_{xx}=-\frac{1}{x^2}, F_{xy}=F_{yy}=0$$

ולכן:

$$k=\frac{\left|-\frac{1}{x^{2}}\right|}{\left(\frac{1}{x^{2}}+1\right)^{\frac{3}{2}}}=\frac{x}{\left(x^{2}+1\right)^{\frac{3}{2}}}$$

והמקסימום מתקבל כאשר $x=\frac{1}{\sqrt{2}}$, כלומר בנקודה $\left(\frac{1}{\sqrt{2}},-\frac{1}{2}\ln 2\right)$.

4.א. יהי M משטח עם פרמטריזציה $X\left(u,v\right)$.

הוכיחו שאם הקואורדינטות איזותרמיות עם פונקציה f אז:

$$\Delta\left(X\right)=-2f^{2}H\vec{n}$$

<u>פתרון:</u>

אנו יודעים שמתקיים היחס: $W=-G^{-1}B$, כלומר:

$$L_{ij}=-L_{j}^{m}g_{mi}$$

מכיוון שהפרמטריזציה איזותרמית:

$$L_{ij}=-L_{j}^{m}f^{2}\delta_{mi}=-f^{2}L_{j}^{i}$$

ואם כן:

$$L_{1}^{1}=-\frac{L_{11}}{f^{2}},L_{2}^{2}=-\frac{L_{22}}{f^{2}}$$

מכיוון ש: $H=\frac{L_{1}^{1}+L_{2}^{2}}{2}$, אפשר לכתוב:

$$H=-\frac{L_{11}+L_{22}}{2f^{2}}$$

כעת, $g_{12}=g_{21}=0$ כלומר $x_{1}\cdot x_{2}=0$. נגזור לפי המשתנה השני; לפי כלל לייבניץ:

$$x_{12}\cdot x_{2}+x_{1}\cdot x_{22}=0$$

כלומר $x_{12}\cdot x_{2}=-x_{1}\cdot x_{22}$.

כמו כן, מכיוון שהפרמטריזציה איזותרמית:

$$g_{11}=g_{22}=x_{1}\cdot x_{1}=x_{2}\cdot x_{2}=f^{2}$$

ואם נגזור את השוויון הזה לפי כלל לייבניץ, נקבל:

$$2\left(x_{11}\cdot x_{1}\right)=2\left(x_{12}\cdot x_{2}\right)$$

נציב $x_{12}\cdot x_{2}=-x_{1}\cdot x_{22}$, נחלק ב$-2$, נעביר אגף ונקבל:

$$x_{11}\cdot x_{1}+x_{1}\cdot x_{22}=0$$

כלומר:

$$x_{1}\cdot\left(x_{11}+x_{22}\right)=0$$

כלומר $\Delta\left(\underline{x}\right)=x_{11}+x_{22}$ מאונך ל$-x_{1}$.

באופן דומה אפשר להראות ש$-x_{11}+x_{22}$ מאונך גם ל$-x_{2}$.

הוקטורים $\{x_{1},x_{2},\vec{n}\}$ פורשים את המרחב. $\vec{n}$ מאונך גם הוא ל$-x_{1},x_{2}$ ולכן הוא פרופורציונלי ל$-x_{11}+x_{22}$:

$$\Delta\left(X\right)=c\vec{n}$$

עבור $c\in\mathbb{R}$ קבוע כלשהו.

כעת:

$$c=\Delta\left(X\right)\cdot\vec{n}=\left(x_{11}+x_{22}\right)\cdot\vec{n}$$

אנו יודעים שמתקיים:

$$x_{11}=\Gamma_{11}^{1}x_{1}+\Gamma_{11}^{2}x_{2}+L_{11}\vec{n},x_{22}=\Gamma_{22}^{1}x_{1}+\Gamma_{22}^{2}x_{2}+L_{22}\vec{n}$$

נציב זאת במשוואה, ומכיוון ש: $x_{1}\cdot\vec{n}=x_{2}\cdot\vec{n}=0$ וגם $\vec{n}\cdot\vec{n}=1$, נקבל מליניאריות המכפלה הפנימית:

$$c=\left(x_{11}+x_{22}\right)\cdot\vec{n}=L_{11}+L_{22}=-2Hf^{2}$$

ולכן:

$$\Delta\left(X\right)=c\vec{n}=-2Hf^{2}\vec{n}$$

כנדרש.

ב. הוכיחו שמשטח הסיבוב של העקומה $x=\cosh z$ הוא מינימלי.

<u>פתרון:</u>

משטח הסיבוב של העקומה $x=\cosh z$, הלא הוא הקטנואיד עם הפרמטריזציה:

$$r\left(\theta,\phi\right)=\left(\cosh\phi\cos\theta,\cosh\phi\sin\theta,\phi\right)$$

מקיים:

$$G=\cosh^{2}\phi\cdot\left(\begin{array}{cc}1 & 0\\0 & 1\end{array}\right)$$

ולכן זו פרמטריזציה איזותרמית של הקטנואיד.

כעת, נחשב את הלפלסיאן של r.

אנו צריכים לבדוק את הלפלסיאן על כל אחד מהרכיבים של r; נסמן:

$$r\left(\theta,\phi\right)=\left(r_{1},r_{2},r_{3}\right)=\left(\cosh\phi\cos\theta,\cosh\phi\sin\theta,\phi\right)$$

כעת:

$$\left(r_{1}\right)_{\theta\theta}=-\cosh\phi\cos\theta,\left(r_{1}\right)_{\phi\phi}=\cosh\phi\cos\theta$$

ואכן:

$$\Delta r_{1}=\left(r_{1}\right)_{\theta\theta}+\left(r_{1}\right)_{\phi\phi}=0$$

באופן דומה:

$$\left(r_{2}\right)_{\theta\theta}=-\cosh\phi\sin\theta,\left(r_{2}\right)_{\phi\phi}=\cosh\phi\sin\theta$$

ואכן:

$$\Delta r_2 = (r_2)_{\theta\theta} + (r_2)_{\phi\phi} = 0$$

ועבור הקואורדינטה השלישית:

$$(r_3)_{\theta\theta}\,, (r_3)_{\phi\phi} = 0$$

ואם כן:

$$\Delta r_3 = (r_3)_{\theta\theta} + (r_3)_{\phi\phi} = 0$$

ובסך הכל:

$$\Delta r = 0$$

לפי סעיף א', $H = 0$ ולכן המשטח מינימלי.

ג. הוכיחו שהמשטח הבא הוא משטח מינימלי:

$$r\,(u, v) = \left(u, v, \ln\left(\frac{\cos u}{\cos v}\right)\right)$$

<u>פתרון:</u>

וקטורי הנגזרות הם:

$$r_u = (1, 0, -\tan u)\,, r_v = (0, 1, \tan v)$$

נחשב את הנורמל:

$$r_u \times r_v = \begin{vmatrix} i & j & k \\ 1 & 0 & -\tan u \\ 0 & 1 & \tan v \end{vmatrix} = (\tan u, -\tan v, 1)$$

ננרמל:

$$\|r_u \times r_v\| = \sqrt{\tan^2 u + \tan^2 v + 1}$$

ולכן:

$$\vec{n}=\frac{r_u\times r_v}{\|r_u\times r_v\|}=\frac{1}{\sqrt{\tan^2 u+\tan^2 v+1}}\left(\tan u,-\tan v,1\right)$$

וקטורי הנגזרות השניות הם:

$$r_{uu}=\left(0,0,-\frac{1}{\cos^2 u}\right),r_{uv}=0,r_{vv}=\left(0,0,\frac{1}{\cos^2 v}\right)$$

מקדמי המטריקה הם:

$$g_{11}=r_u\cdot r_u=1+\tan^2 u=\frac{1}{\cos^2 u}$$

$$g_{12}=g_{21}=r_u\cdot r_v=-\tan u\tan v$$

$$g_{22}=r_v\cdot r_v=1+\tan^2 v=\frac{1}{\cos^2 v}$$

איברי התבנית היסודית השנייה הם:

$$L_{11}=r_{uu}\cdot\vec{n}=-\frac{1}{\cos^2 u\sqrt{\tan^2 u+\tan^2 v+1}}$$

$$L_{12}=L_{21}=r_{uv}\cdot\vec{n}=0$$

$$L_{22}=r_{vv}\cdot\vec{n}=\frac{1}{\cos^2 v\sqrt{\tan^2 u+\tan^2 v+1}}$$

כעת:

$$G=\begin{pmatrix}\frac{1}{\cos^2 u} & -\tan u\tan v\\ -\tan u\tan v & \frac{1}{\cos^2 v}\end{pmatrix}$$

ולכן:

$$G^{-1}=\left(\frac{1-\sin^2 u\sin^2 v}{\cos^2 u\cos^2 v}\right)\begin{pmatrix}\frac{1}{\cos^2 v} & \tan u\tan v\\ \tan u\tan v & \frac{1}{\cos^2 u}\end{pmatrix}$$

בנוסף:

$$B=\frac{1}{\sqrt{\tan^2 u+\tan^2 v+1}}\begin{pmatrix}-\frac{1}{\cos^2 u} & 0\\ 0 & \frac{1}{\cos^2 v}\end{pmatrix}$$

נזכור ש: $W=-G^{-1}B$, כלומר:

$$W=\frac{\sin^2 u\sin^2 v-1}{\cos^2 u\cos^2 v\sqrt{\tan^2 u+\tan^2 v+1}}\begin{pmatrix}-\frac{1}{\cos^2 u\cos^2 v} & \frac{\tan u\tan v}{\cos^2 v}\\ -\frac{\tan u\tan v}{\cos^2 u} & \frac{1}{\cos^2 u\cos^2 v}\end{pmatrix}$$

כלומר:

$$H=\frac{1}{2}trW=0$$

5. הביטויים הבאים נתונים בסכימת איינשטיין. בטאו באמצעות המקדמים L_{ij},Γ_{ij}^k וכו' ופשטו ככל האפשר.

א. $\left\langle x_j,x_{pq}\right\rangle g^{pq}$.

<u>פתרון:</u>

נשתמש בנוסחה:

$$x_{pq}=\Gamma_{pq}^k x_k+L_{pq}\vec{n}$$

קל אולי לפתוח את הסכום ואז להסתכל על הביטוי:

$$\left\langle x_j,x_{pq}\right\rangle g^{pq}=\left\langle x_j,x_{11}\right\rangle g^{11}+\left\langle x_j,x_{12}\right\rangle g^{12}+\left\langle x_j,x_{21}\right\rangle g^{21}+\left\langle x_j,x_{22}\right\rangle g^{22}$$

נזכור שהוקטורים $x_j,\vec{n}$ הם אורתוגונאליים, ומתכונות המכפלה הפנימית נקבל (אחרי שנשתמש בנוסחה):

$$\left\langle x_j,x_{pq}\right\rangle g^{pq}=\Gamma_{pq}^k\left\langle x_j,x_k\right\rangle g^{pq}=\Gamma_{pq}^k g_{jk}g^{pq}$$

אפשר אולי לפתוח שוב את הסכום ולסדר יותר.

ב. $\left\langle x_{pqr},\vec{n}\right\rangle$.

<u>פתרון:</u>

x_{pqr} הוא הנגזרת השלישית (לפי המשתנים u_p,u_q,u_r). לפי כלל לייבניץ:

$$\frac{\partial}{\partial u_r}\left\langle x_{pq},\vec{n}\right\rangle=\left\langle x_{pqr},\vec{n}\right\rangle+\left\langle x_{pq},\vec{n}_r\right\rangle$$

כעת: $x_{pq}=\Gamma_{pq}^{k}x_k+L_{pq}\vec{n}$, ושוב מכיוון שהוקטורים $x_j,\vec{n}$ הם אורתוגונאליים נקבל:

$$\langle x_{pq},\vec{n}\rangle=\left\langle \Gamma_{pq}^{k}x_k+L_{pq}\vec{n},\vec{n}\right\rangle=L_{pq}\langle\vec{n},\vec{n}\rangle=L_{pq}$$

כמו כן, אנו יודעים שמתקיים:

$$\vec{n}_r=L_r^j x_j$$

ולכן:

$$\langle x_{pq},\vec{n}_r\rangle=\left\langle \Gamma_{pq}^{k}x_k+L_{pq}\vec{n},L_r^j x_j\right\rangle=\left\langle \Gamma_{pq}^{1}x_1+\Gamma_{pq}^{2}x_2,L_r^1 x_1+L_r^2 x_2\right\rangle$$

שוב, כי הנורמל מאונך לוקטורי הנגזרות. אם כן:

$$\langle x_{pq},\vec{n}_r\rangle=\Gamma_{pq}^{k}L_r^j g_{jk}=-\Gamma_{pq}^{k}L_{rk}$$

בסך הכל:

$$\langle x_{pqr},\vec{n}\rangle=\frac{\partial}{\partial u_r}\langle x_{pq},\vec{n}\rangle-\langle x_{pq},\vec{n}_r\rangle=L_{pq,r}+\Gamma_{pq}^{k}L_{rk}$$

שוב, אולי אפשר לשחק עם זה יותר.

ג. $\delta_j^i g_{ik}\delta_l^k$.

<u>פתרון:</u>

מהגדרת הדלתא של קרונקר, נקבל בפשטות:

$$g_{jl}$$

אפשר לפתוח את הסכום (סה"כ ארבעה ביטויים) ולהיווכח שאכן כך הוא.

ד. $\delta_m^k\langle x_{ab},\vec{n}_k\rangle$, באמצעות L_{ij},Γ_{ij}^k בלבד.

<u>פתרון:</u>

בסעיף קודם ראינו שמתקיים:

$$\langle x_{ab},\vec{n}_k\rangle=-\Gamma_{ab}^{j}L_{kj}$$

לפיכך:

$$\delta_m^k\langle x_{ab},\vec{n}_k\rangle=-\delta_m^k\Gamma_{ab}^{j}L_{kj}=-\Gamma_{ab}^{j}L_{mj}$$