הרצאה 13

נכתב על ידי יהונתן רגב

הערה

תהי $A\in\mathbb{F}^{n\times n}$. נניח: $p_A(x)$ מתפרק לחלוטין.

A לכסינה אם ורק אם $m_A(x)=(x-\lambda_1)\cdots(x-\lambda_s)$.

נימוק

$$A\sim\mathcal{J}=\begin{pmatrix}\mathcal{J}_{n_1}(\lambda_1) & 0 & \cdots & \cdots & 0\\ 0 & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots\\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots\\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & 0\\ 0 & \cdots & \cdots & 0 & \mathcal{J}_{n_t}(\lambda_t)\end{pmatrix}$$

$\boxed{\Leftarrow}$

נניח A לכסינה, אזי כל בלוק של $\mathcal{J}$ הוא מגודל 1×1 (שכן מיחידות צורת ז'ורדן היא מטריצה אלכסונית).

לכן:

$$m_A(x)=m_{\mathcal{J}}(x)=l.c.m\{(x-\lambda_1)\cdots(x-\lambda_1),\cdots,(x-\lambda_s)\cdots(x-\lambda_s)\}=(x-\lambda_1)\cdots(x-\lambda_s)$$

$\boxed{\Rightarrow}$

אם $m_A(x)=(x-\lambda_1)\cdots(x-\lambda_s)$, אזי כל בלוק ב – $\mathcal{J}$ הוא מגודל 1×1. אחרת, אם קיים בלוק מגודל $l\times l$, אזי יש לו פולינום מינימלי בצורה $(x-\lambda)^l$, בסתירה להנחה. ז"א, $\mathcal{J}$ אלכסונית, ולכן A לכסינה (שכן מיחידות צורת ז'ורדן היא אלכסונית).

■

מכפלה פנימית

יהי $\mathbb{F}=\begin{cases}\mathbb{R}\\ \mathbb{C}\end{cases}$.

הגדרה

יהי $V_{/\mathbb{F}}$ מרחב וקטורי.

נגדיר, לכל זוג וקטורים $v,w\in V$, את **המכפלה הפנימית** של v על w, $\langle v,w\rangle\in\mathbb{F}$, כך שמתקיימים התנאים הבאים:

1. **1.5 לינאריות ($sesquilinear$)**

$$< \alpha_1 v_1+\alpha_2 v_2, w > = \alpha_1 < v_1, w > + \alpha_2 < v_2, w >.$$

$$< v, \beta_1 w_1+\beta_2 w_2 > = \overline{\beta_1} < v, w_1 > + \overline{\beta_2} < v, w_2 >.$$

2. **הרמטיות ($Hermite$)**

$$< v, w > = \overline{< w, v >}.$$

3. **אי שליליות (או חיוביות)**

$$< v, v > \in \mathbb{R}_{\geq 0},\ < v, v > = 0 \Leftrightarrow v=\vec{0}.$$

תזכורת

יהי: $z=x+y\cdot i\in\mathbb{C}$. אזי:

- $\bar{z}=x-y\cdot i$.
- $\overline{z_1+z_2}=\overline{z_1}+\overline{z_2}$.
- $\overline{z_1\cdot z_2}=\overline{z_1}\cdot\overline{z_2}$.
- $\bar{\bar{z}}=z$.
- $|z|=z\cdot\bar{z}=x^2+y^2\in\mathbb{R}_{\geq 0}$.
- $|z|=0\leftrightarrow z=0$.

דוגמה

$$V=\mathbb{C}^n=\left\{v=\begin{pmatrix}\gamma_1\\ \vdots\\ \vdots\\ \gamma_n\end{pmatrix}\right\}_{\gamma_i\in\mathbb{C}}.$$

נכתב על ידי יהונתן רגב

אם $w=\begin{pmatrix}\gamma_1{}'\\ \vdots\\ \vdots\\ \gamma_n{}'\end{pmatrix}$, נגדיר: $<v,w>=\gamma_1\overline{\gamma_1'}+\cdots+\gamma_n\overline{\gamma_n'}$.

נבדוק את התנאים 1,2,3:

1. נסמן:

$$v_1=\begin{pmatrix}\gamma_1\\ \vdots\\ \gamma_n\end{pmatrix},v_2=\begin{pmatrix}\delta_1\\ \vdots\\ \delta_n\end{pmatrix}$$

נחשב:

$$<\alpha_1v_1+\alpha_2v_2,w>=<\begin{pmatrix}\alpha_1\gamma_1+\alpha_2\delta_1\\ \vdots\\ \alpha_1\gamma_n+\alpha_2\delta_n\end{pmatrix},\begin{pmatrix}\gamma_1{}'\\ \vdots\\ \gamma_n{}'\end{pmatrix}>$$

$$<\alpha_1v_1+\alpha_2v_2,w>=(\alpha_1\gamma_1+\alpha_2\delta_1)\overline{\gamma_1'}+\cdots+(\alpha_1\gamma_n+\alpha_2\delta_n)\overline{\gamma_n'}$$

$$<\alpha_1v_1+\alpha_2v_2,w>=\alpha_1\left(\gamma_1\overline{\gamma_1'}+\cdots\gamma_n\overline{\gamma_n'}\right)+\alpha_2(\delta_1\overline{\gamma_1'}+\cdots\delta_n\overline{\gamma_n'})$$

$$<\alpha_1v_1+\alpha_2v_2,w>=\alpha_1<v_1,w>\ +\alpha_2<v_2,w>$$

נסמן:

$$w_1=\begin{pmatrix}\gamma_1{}'\\ \vdots\\ \gamma_n{}'\end{pmatrix},w_2=\begin{pmatrix}\delta_1{}'\\ \vdots\\ \delta_n{}'\end{pmatrix}$$

נחשב:

$$<v,\beta_1w_1+\beta_2w_2>=<\begin{pmatrix}\gamma_1\\ \vdots\\ \gamma_n\end{pmatrix},\begin{pmatrix}\beta_1\gamma_1'+\beta_2\delta_1{}'\\ \vdots\\ \beta_1\gamma_n'+\beta_2\delta_n{}'\end{pmatrix}>$$

$$=\gamma_1\overline{(\beta_1\gamma_1'+\cdots+\beta_2\delta_1')}+\gamma_n\overline{(\beta_1\gamma_n'+\cdots+\beta_2\delta_n')}$$
$$=\overline{\beta_1}\left(\gamma_1\overline{\gamma_1'}+\cdots+\gamma_n\overline{\gamma_n'}\right)+\beta_2\left(\gamma_1\overline{\delta_1'}+\cdots+\gamma_n\overline{\delta_n'}\right)$$
$$<v,\beta_1w_1+\beta_2w_2>=\overline{\beta_1}<v,w_1>\ +\overline{\beta_2}<v,w_2>$$

2. נסמן:

$$v=\begin{pmatrix}\gamma_1\\ \vdots\\ \gamma_n\end{pmatrix},w=\begin{pmatrix}\gamma_1{}'\\ \vdots\\ \gamma_n{}'\end{pmatrix}$$

נחשב:

$$< v, w > = < \begin{pmatrix} \gamma_1 \\ \vdots \\ \gamma_n \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} {\gamma_1}' \\ \vdots \\ {\gamma_n}' \end{pmatrix} > = \gamma_1 \overline{\gamma_1'} + \cdots \gamma_n \overline{\gamma_n'}$$

$$< \mathrm{w}, \mathrm{v} > = < \begin{pmatrix} {\gamma_1}' \\ \vdots \\ {\gamma_n}' \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \gamma_1 \\ \vdots \\ \gamma_n \end{pmatrix} > = \gamma_1' \overline{\gamma_1} + \cdots + \gamma_n' \overline{\gamma_n}$$

$$\overline{< \mathrm{w}, \mathrm{v} >} = \overline{\gamma_1'} \overline{\overline{\gamma_1}} + \cdots + \overline{\gamma_n'} \overline{\overline{\gamma_n}} = \gamma_1 \overline{\gamma_1'} + \cdots \gamma_n \overline{\gamma_n'} = < v, w >$$

3. נסמן:

$$v = \begin{pmatrix} \gamma_1 \\ \vdots \\ \gamma_n \end{pmatrix}$$

נחשב:

$$< v, v > = \gamma_1 \overline{\gamma_1} + \cdots + \gamma_n \overline{\gamma_n}$$

$$= |\gamma_1|^2 + \cdots + |\gamma_n|^2 \in \mathbb{R}_{\geq 0}$$

$$\Downarrow$$

$$< v, v > = 0$$

$$\Updownarrow$$

$$|\gamma_1| = \cdots = |\gamma_n| = 0 \Leftrightarrow \gamma_1 = \cdots = \gamma_n = 0 \Leftrightarrow v = \vec{0}$$

$$\blacksquare$$

הגדרה

יהי $V_{/\mathbb{F}}$ מרחב מכפלה פנימית (מרחב וקטורי עליו מוגדרת מכפלה פנימית המקיימת את האקסיומות).

נגדיר, לכל $v \in V$, את המספר הממשי $||v|| = \sqrt{< v, v >}$. $||v||$ נקרא ה**נורמה** של v.

$||v|| = 0 \Leftrightarrow v = \vec{0}$. (הכללה של האורך של וקטור בגאומטריה).

דוגמה

$$V = \mathbb{R}^2$$

$$v = \begin{pmatrix} \gamma_1 \\ \gamma_2 \end{pmatrix}, w = \begin{pmatrix} {\gamma_1}' \\ {\gamma_2}' \end{pmatrix}$$

$$< v,w > = \gamma_1 \cdot \gamma_1' + \gamma_2 \cdot \gamma_2'$$

$$< v,v > = \gamma_1^2 + \gamma_2^2$$

$$||v|| = \sqrt{\gamma_1^2 + \gamma_2^2}$$