תרגיל 4

1. יהי (X,τ) מרחב טופולוגי ו־$Y \subseteq X$ תת קבוצה. הוכיחו ש־Y הוא מרחב טופולוגי יחד עם טופולוגיית תת המרחב

$$\tau_Y := \{Y \cap O \mid O \in \tau\}$$

2. הוכיחו שהטופולוגיה הקו־סופית שמוגדרת ע"י $\tau_{cof} := \{\emptyset\} \cup \{O \subseteq X \mid |O^c| < \infty\}$ היא אכן טופולוגיה.
   (א) מתי היא מטריזבילית?

3. הוכיחו שטופולוגיית סרפינסקי שמוגדרת ע"י $X := \{a,b\}$ ו־$\tau_{\text{Sierpiński}} := \{\emptyset, \{a\}, X\}$ היא אכן טופולוגיה.

4. נסתכל על X לא בת מניה ונגדיר $\tau_{\text{coc}} = \{O \mid \ |O^c| \le \aleph_0\}$.
   (א) הראו שזו אכן טופולוגיה
   (ב) הוכיחו כי כל סדרה מתכנסת היא קבועה לבסוף.
   (ג) הסיקו שזה לא מרחב מטריזבילי.

5. הוכיחו שטופולגיית תת המרחב של מרחב מטרי מתלכדת עם הטופולוגיה שנגזרת מהמטריקה.

6. תהי $(P,<)$ קבוצה סדורה לינארית. עבור $a,b \in P$ נגדיר $(a,b) := \{x \in P \mid a < x < b\}$. נסמן גם באופן פורמלי $(a,\infty) := \{x \in P \mid a < x\}$ וגם $(-\infty,b) := \{x \in P \mid x < b\}$. נגדיר את טופולוגיית הסדר ע"י

$$\tau_< := \{O \subseteq P \mid \forall\ x \in O\ \exists\ a,b \in P \cup \{-\infty,\infty\} : x \in (a,b) \subseteq O\}$$

   (א) הוכיחו שזו אכן טופולוגיה

(ב) הסבירו כיצד שונה הטופולוגיה על $[0,1) \cup \{2\}$ כתת מרחב של $\mathbb{R}$ וכמרחב עם טופולוגיית הסדר.

7. נסתכל על הקבוצה $P := [0,1]^2$ יחד עם הסדר המילוני (לקסיקוגרפי). כלומר, אם $\overline{x}, \overline{y} \in P$ אז

$$\overline{x} < \overline{y} \iff x_1 < y_1 \vee (x_1 = y_1 \wedge x_2 < y_2)$$

כלומר קודם בודקים את הקואורדינטה הראשונה ואם הן שוות, בודקים את הקואורדינטה השניה.

(א) הוכיחו שהמשולש

$$T_+ := \{\overline{x} \in P \mid x_1 < x_2\}$$

הוא קבוצה פתוחה

(ב) הסיקו שהאלכסון

$$D := \{\overline{x} \in P \mid x_1 = x_2\}$$

הוא קבוצה סגורה.

(ג) הראו שהמעגל

$$C := \{\overline{x} \in P \mid (x_1 - \frac{1}{2})^2 + (x_2 - \frac{1}{2})^2 < \left(\frac{1}{2}\right)^2\}$$

הוא קבוצה פתוחה.

(ד) מה היחס בין הטופולוגיה הזו של P לבין הטופולוגיה האוקלידית?

8. הוכיחו ש־X הוא T_1 אמ"מ כל נקודון סגור. מה זה אומר על X סופי?

9. ראינו כבר שלסדרה במרחב T_2 יש גבול יחיד. נניח ש־X מ"ט כך שכל סדרה שמתכנסת, מתכנסת לגבול יחיד. האם הוא בהכרח T_2?

10. הוכיחו שעבור $(P,<)$ סדורה לינארית, P היא T_2.

11. השלימו את הטבלה הבאה לפי מיטב ידיעתכם:

מרחב טופולוגי	מטריזבילי	אולטרה־מטריזבילי	חסום	שלם	$T_?$
המרחב הדיסקרטי					
הטופולוגיה הטריוויאלית אם X אינו נקודון					
$\mathbb{R}^n$					
$[0,1]$					
$(\mathbb{Z}, d_p)$					
$(\mathbb{Q}, d_p)$					
$(\overline{\mathbb{Z}}, d_p)$ (כלומר ההשלמה)					
$(\overline{\mathbb{Q}}, d_p)$ (כלומר ההשלמה)					
l_1					
l_2					
l_∞					
$(C[0,1], d_\infty)$					
$(C[0,1], d_1)$					
$(\{a,b\}, \tau_{\text{Sierpiński}})$					
(X, τ_{cof}) עבור X אין סופי					
(X, τ_{coc}) עבור X לא בן מניה					
$([0,1]^2, <_{lex}, \tau_{<_{lex}})$					