

# תרגיל 9

להגשה עד 30.12.15

יהי  $(X, \mathbb{A})$  מרחב מדיד.

## שאלה 1

נניח כי  $\mu$  ו- $\nu$  הינן מידות חיוביות ו- $\sigma$  סופיות כך ש:  $\nu \ll \mu$ . תהי  $\lambda = \mu + \nu$ . (שימו לב כי  $\mu \ll \lambda$  וגם  $\nu \ll \lambda$ ).

הוכיחו כי אם  $f = \frac{d\mu}{d\lambda}$  ו:  $g = \frac{d\nu}{d\lambda}$  אזי:

1.  $f > 0$  כב"מ- $\mu$ .

2.  $f + g = 1$  כב"מ- $\lambda$ .

3.  $d\nu = \frac{g}{f} d\mu$ .

## שאלה 2

יהיו  $\mu$  ו- $\nu$  שתי מידות חיוביות כך ש- $\mu \ll \nu$  ו- $g = \frac{d\mu}{d\nu}$ .

הראו כי אם  $f$  פונקציה אינטגרבלית ביחס למידה  $\mu$  אזי היא אינטגרבלית ביחס למידה  $\nu$ , ומתקיים:

$$\int_X fg \, d\nu = \int_X f \, d\mu$$

## שאלה 3

תהי  $\hat{C}$  קבוצת קנטור מוכללת המתאימה לסדרה  $(c_k)_{\mathbb{N}}$  (כפי שבנינו בתרגול).

1. הוכיחו כי

$$m(\hat{C}) = 1 - \sum_{k=1}^{\infty} 2^{k-1} c_k \geq 0$$

באשר  $m$  מייצגת את מידת לבג על הקטע  $[0, 1]$ .

2. יהי  $a \in (0, 1)$ . למה שווה  $m(\hat{C})$  אם:

$$c_k = \frac{1-a}{3^k}$$

בפרט: מהי מידת לבג של קבוצת קנטור?

**בהנאה (:**