אלגברה לינארית למהנדסים - פתרון תרגיל בית 6

הערה: פתרון זה אינו מהווה פתרון מלא אלא רק סקיצה, כשאתם רושמים פתרון אתם נדרשים לפרט יותר.

1. יהי V מ"ו מעל שדה $\mathbb{F}$ ו־$A = \{v_1, \dots, v_n\}$ קבוצה סופית של וקטורים מ־V. לגבי כל אחת מהטענות הבאות קבעו האם היא נכונה. אם כן־ הוכיחו אותה, אם לא־ הפריכו אותה ע"י מתן דוגמה נגדית.

   (א) אם A ת"ל (תלוייה ליניארית) אז כל תת־קבוצה $B \subseteq A$ ת"ל.
   פתרון: הטענה אינה נכונה. נתבונן ב $\mathbb{R}^2$ מעל $\mathbb{R}$ עם $A = \{(1,0),(0,1),(2,0)\}$.

   (ב) אם A בת"ל אזי כל תת־קבוצה $B \subseteq A$ בת"ל.
   פתרון: נכון, ישירות מן ההגדרה.

   (ג) אם A בת"ל ו־$v \in V$,$v \notin A$ אזי $A \cup \{v\}$ בת"ל.
   פתרון: לא נכון. נתבונן ב $\mathbb{R}^2$ מעל $\mathbb{R}$ עם $v = (2,0)$ $A = \{(1,0),(0,1)\}$.

   (ד) אם A בת"ל ו־$v \in V$,$v \notin Span(A)$ אזי $A \cup \{v\}$ בת"ל.
   פתרון: נכון, כי אם בשלילה $A = \{v_1, \dots, v_n, v\}$ ת"ל אז יש וקטור שתלוי בקודמיו, סתירה.

   (ה) אם A בת"ל ו־$v \in V$,$v \notin Span(A)$ אזי $\{v_1 + v, \dots, v_n + v\}$ בת"ל.
   פתרון: נכון, אם נניח בשלילה ש־$\{v_1 + v, \dots, v_n + v\}$ ת"ל אז מכיוון ש־A בת"ל אז לפי מה שהוכחנו בתרגול $v \in Span(A)$, סתירה.

   (ו) אם A בת"ל ו־$v \in V$,$v \in Span(A)$ אזי $\{v_1 + v, \dots, v_n + v\}$ בת"ל.
   פתרון: לא נכון. נתבונן ב־$\mathbb{R}^2$ מעל $\mathbb{R}$ עם $A = \{(0,1),(1,0)\}$ ו־$v = (-1,0)$ ונקבל קבוצה ת"ל.

   (ז) אם A בת"ל ו־$v \in V$,$v \in Span(A)$ אזי $\{v_1 + v, \dots, v_n + v\}$ ת"ל.
   פתרון: לא נכון. נתבונן ב־$\mathbb{R}^2$ מעל $\mathbb{R}$ עם $A = \{(0,1),(1,0)\}$ ו־$v = (1,0)$ ונקבל קבוצה בת"ל.

   (ח) אם A בת"ל ו־$v, u \in V$ מקיימים $u \in Span(A \cup \{v\})$,$u \notin Span(A)$, אז יש $a \in \mathbb{F}$ כך ש $u = av$.
   פתרון: לא נכון. נתבונן ב־$\mathbb{R}^3$ מעל $\mathbb{R}$. נקח $A = \{(1,0,0),(0,1,0)\}$, $u = (1,1,1)$ $v = (0,0,1)$.

2. נסתכל על $\mathbb{R}^3$ כמ"ו מעל $\mathbb{R}$. תהא $A = \{(1,3,x),(1,2,2),(x,1,1)\}$ קבוצת וקטורים כש־$x \in \mathbb{R}$.

   (א) מצאו x כך ש־A ת"ל.
   פתרון: $x = 3$.

(ב) מצאו x כך ש־A בת"ל.
פתרון: $x=-1$.

3. על הוקטורים $(1,7)$ ו־$(2,-1)$, ניתן להסתכל מעל הרציונלים ומעל השדות הראשוניים $\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$ (עבור p ראשוני). בכל מקרה מצאו האם הם תלויים ליניארית ומה המרחב הנפרש על ידם.
רמז: על פניו נראה שיש לבדוק אינסוף מקרים (יש אינסוף שדות לבדוק), אך בפועל תראו שיש רק מספר קטן של שדות יוצאי דופן.
פתרון: נקח צ"ל מתאפס (מעל שדה כלשהו) של שני הוקטורים: $a(2,-1)+b(1,7)=0$. זה נותן את המשוואות:

$$2a+b=0 \quad -a+7b=0$$

ז"א: $15a=0 \quad 15b=0$. שימו לב שאת הפעולות הנ"ל היה אפשר לבצע בכל שדה. זאת אומרת, רק חיברנו, חיסרנו והכפלנו, לא חילקנו. כעת אם השדה שלנו אינו $\mathbb{Z}/3\mathbb{Z}$ או $\mathbb{Z}/5\mathbb{Z}$(ז"א המציין אינו 3 או 5) אז ל־15 יש הופכי ולכן בהכרח $a=b=0$. ז"א, הוקטורים בת"ל והם פורשים את מרחב הזוגות מעל אותו שדה.
אם השדה הוא $\mathbb{Z}/3\mathbb{Z}$ אז הוקטורים הם $(1,1)$ ו־$(2,2)$. לכן הם תלויים ליניארית והם פורשים את $\{(t,t)|\ t\in\mathbb{Z}/3\mathbb{Z}\}$.
אם השדה הוא $\mathbb{Z}/5\mathbb{Z}$ אז הוקטורים הם $(1,2)$ ו־$(2,4)$. גם כאן, הם ת"ל והם פורשים את $\{(t,2t)|\ t\in\mathbb{Z}/5\mathbb{Z}\}$

4. תארו את המרחב הנפרש ע"י קבוצות הוקטורים הבאות מעל הממשים ומצאו לו בסיס. (כשהקבוצות מכילות פולינומים, הכוונה היא שהם במרחב $\mathbb{R}[x]$)

(א) $\{(3,4),(6,7)\}$
פתרון: שני הוקטורים הם בת"ל כי אין כפולה של הוקטור הראשון שתתן את השני. נשים לב ש־$(0,1)=2(3,4)-(6,7)$ $\frac{4(6,7)-7(3,4)}{3}=(1,0)$ ולכן הם פורשים את כל $\mathbb{R}^2$ והם גם בסיס למרחב זה.

(ב) $\{x^2-x,x^2-1\}$
פתרון: לפי הגדרה,

$$Span(\{x^2-x,x^2-1\})=\{a(x^2-x)+b(x^2-1)|a,b\in\mathbb{R}\}=\{-b-ax+(a+b)x^2|a,b\in\mathbb{R}\}$$

ז"א זהו תת־המרחב הוקטורי של פולינומים מדרגה לכל היותר 2, כך שסכום המקדמים הוא 0. מכיוון ש־$\{x^2-x,x^2-1\}$ בת"ל אזי היא גם בסיס למרחב זה.

(ג) $\{(0,3,3),(4,6,5),(2,0,2)\}$
פתרון: נשים לב ש־

$$(1,0,0)=\frac{2(4,6,5)+(2,0,2)-4(0,3,3)}{10}$$

$$(0,1,0)=\frac{3(4,6,5)-(0,3,3)-6(2,0,2)}{15}$$

$$(0,0,1)=\frac{2(2,0,2)+2(0,3,3)-(4,6,5)}{5}$$

כמו כן הם בת"ל. לכן הם פורשים את כל $\mathbb{R}^3$ וכן הם בסיס למרחב זה.

(ד) $\{x^4+x^2, x^4+1, x^2+1\}$

פתרון: נשים לב ש־

$$x^4 = \frac{(x^4+x^2)+(x^4+1)-(x^2+1)}{2}$$

$$x^2 = \frac{(x^4+x^2)+(x^2+1)-(x^4+1)}{2}$$

$$1 = \frac{(x^4+1)+(x^2+1)-(x^4-x^2)}{2}$$

כמו כן נשים לב ששלושת הוקטורים שהתקבלו פורשים את הוקטורים הנתונים, ולכן הם פורשים את אותו מרחב: $Span\{1, x^2, x^4\}$. זאת אומרת, את המרחב של הפולינומים מדרגה לכל היותר 4 שבהם מופיעות רק החזקות הזוגיות של x ($x^0=1$). $\{1, x^2, x^4\}$ בת"ל ולכן גם בסיס למרחב זה.

שאלה 5

נמצא בסיס ואת המימד למרחבים הבאים:

א) $V = \text{Span}\left\{(3,4,2,5), (1,2,1,2), (1,0,0,1), (0,6,3,3)\right\}$ (כתת מרחב של $\mathbb{R}^4$):
אם נסמן את ארבעת הוקטורים הנ"ל ב $v_1, \dots, v_4$, חישוב פשוט מראה כי:

$$\begin{aligned} v_1 &= v_3 + 2v_2 \\ v_4 &= 3v_2 - 3v_3 \end{aligned}$$

ולכן

$$V = \text{Span}\left\{v_2, v_3\right\}$$

v_2 ו v_3 אינם תלויים לינארית כי הם אינם מכפלה בסקלר זה של זה, ולכן $\{v_2, v_3\}$ הוא בסיס למרחב V, שמימדו הוא לכן 2.

ב) $V = \left\{(x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3 \,|\, x_1 + 2x_2 + 3x_3 = 0\right\}$:
יהיו $v_1 = (2, -1, 0)$ ו $v_2 = (3, 0, -1)$. קל לראות כי הם אינם תלויים (אינם מכפלה בסקלר זה של זה), וכי הם מוכלים ב V ולכן $\dim V \geq 2$ (וודאו כי אתם מבינים מדוע!).
אנו יודעים כי כי $V \subsetneq \mathbb{R}^3$ (כי $(1,0,0) \notin V$, למשל) ולכן משאלה 2 סעיף ב' נובע כי:

$$\dim V < \dim \mathbb{R}^3 = 3$$

. סה"כ אנחנו מקבלים כי:

$$2 \leq \dim V < 3$$

ולכן $\dim V = 2$. v_1, v_2 הם אפוא שני וקטורים בת"ל במרחב ממימד 2, ולכן הם בהכרח פורשים אותו (כי מאחר שהם בלתי תלויים, הם בהגדרה בסיס למרחב אותו הם פורשים, ולכן מרחב זה מוכל ב V ושווה לו במימדו, ומשאלה 2 סעיף ב' נובע כי הוא בהכרח שווה ל V). קיבלנו אפוא כי $\{v_1, v_2\}$ הוא בסיס ל V.

ג) $V = \left\{(x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3 \,|\, x_1 + x_2 + x_3 = 0 \,and\, x_1 - 2x_2 + \pi x_3 = 0\right\}$:
יהא $v = (-2-\pi, \pi - 1, 3)$. חישוב קצר מראה כי $v \in V$. נרצה להראות כי $\{v\}$ הוא בסיס ל V.
$v \neq 0$ ולכן אינו תלוי לינארית, ונותר אפוא רק להראות כי v פורש את V. נניח כי $u = (x, y, z) \in V$. אזי מתקיים:

$$\begin{aligned} x + y + z &= 0 \\ x - 2y + \pi z &= 0 \end{aligned}$$

נכפיל את המשוואה הראשונה ב π ונחסר מהתוצאה את המשוואה השנייה ונקבל:

$$(\pi - 1)\,x = (-2 - \pi)\,y$$

ולכן:

$$\frac{x}{-2-\pi}=\frac{y}{\pi-1}$$

מצד שני אם נחסר את המשוואה השניה מהראשונה נקבל:

$$3y=(\pi-1)\,z$$

ולכן

$$\frac{y}{\pi-1}=\frac{z}{3}$$

וסה"כ קיבלנו כי:

$$\frac{x}{-2-\pi}=\frac{y}{\pi-1}=\frac{z}{3}$$

אם נסמן את גודל זה ב λ נקבל:

$$\begin{aligned} u &= (x,y,z)=\left(\frac{x}{-2-\pi}(-2-\pi),\frac{y}{\pi-1}(\pi-1),\frac{z}{3}\cdot 3\right)=(\lambda(-2-\pi),\lambda(\pi-1),\lambda\cdot 3)\\ &= \lambda(-2-\pi,\pi-1,3)=\lambda v \end{aligned}$$

ולכן u נפרש ע"י $\{v\}$, וקיבלנו כי $\{v\}$ אכן בסיס ל V, שממדו הוא אפוא 1.

ד) V = מרחב הפולינומים ממעלה $\geq n$ מעל $\mathbb{R}$ המתאפסים בנקודה $x=-1$:
ראשית נשים לב כי עבור כל $1\leq k\leq n$, אם נסמן $v_k=x^k-(-1)^k$ אז מתקיים $v_k\in V$.
נרצה להראות כי $B=\{v_1,\ldots,v_n\}$ הוא בסיס ל V.
ראשית נראה כי B תלויה לינארית. נניח כי $\alpha_1,\ldots,\alpha_n\in\mathbb{R}$ מקיימים:

$$\alpha_1 v_1+...+\alpha_n v_n=0$$

נשים לב כי אגף שמאל הוא פולינום בו המקדם של x^k הוא בדיוק α_k לכל $1\leq k\leq n$ (כי v_k הוא הפולינום היחידי שבו מופיעה החזקה הזו) . מאחר שהפולינום מתאפס, אנו יודעים כי מקדמי כל החזקות הם 0 ולכן אנחנו מקבלים כי $\alpha_k=0$ לכל $1\leq k\leq n$, וקיבלנו כל צירוף לינארי של איברי B שמתאפס הוא בהכרח טריוויאלי ולכן B בת"ל.
כדי לראות ש B פורשת את V, נניח כי

$$p(x)=a_n x^n+a_{n-1}x^{n-1}+...+a_0\in V$$

אזי אנחנו יודעים כי $p(-1)=0$ ולכן:

$$(-1)^n a_n+(-1)^{n-1}a_{n-1}+...+a_2-a_1+a_0=0$$

ולכן

$$a_0=(-1)^{n-1}a_n+(-1)^{n-2}a_{n-1}+...-a_2+a_1$$

נשים לב כי:

$$\begin{aligned} a_n v_n + a_{n-1} v_{n-1} + ... + a_1 v_1 &= \left[a_n x^n - a_n (-1)^n\right] + ... + \left[a_1 x + a_1\right] \\ &= a_n x^n + ... + a_1 x + \left((-1)^{n-1} a_n + (-1)^{n-2} a_{n-1} + ... - a_2 + a_1\right) \\ &= a_n x^n + ... + a_1 x + a_0 \\ &= p(x) \end{aligned}$$

לכן אנחנו מקבלים כי $a_1, \ldots, a_n$ הם מקדמים המקיימים $\sum_{k=1}^{n} a_k v_k = p(x)$ ולכן $p(x) \in \mathrm{Span} B$ לכל $p(x) \in V$ ולכן $\mathrm{Span} B = V$ וקיבלנו כי איברי B הם בת"ל ופורשים את V, ולכן B הוא בסיס ל V, שמימדו הוא אפוא n.

שאלה 6

יהי V מרחב וקטורי נוצר סופית, ויהא $U \subseteq V$ תת־מרחב.

א) נראה כי $\dim U \leq \dim V$. נניח כי $\{u_1, \ldots, u_d\}$ הוא בסיס ל U. אזי $u_1, \ldots, u_d$ הם d וקטורים בלתי תלויים המוכלים ב V שהינו מרחב ממימד $\dim V$ ולכן ממשפט שראינו מכיתה מתקיים $d \leq \dim V$, וברור כי $d = \dim U$ והטענה הוכחה.

ב) נראה כי $\dim U = \dim V$ אם"ם $U = V$. כיוון ה"אם" הוא טריוויאלי. נניח אפוא כי $d := \dim U = \dim V$ ונראה כי $U = V$. נניח בשלילה כי $U \subsetneq V$, ויהיה $\{u_1, \ldots, u_d\}$ בסיס ל U. אזי קיים $v \in V \setminus U$, ולכן $v \notin \mathrm{Span}\{u_1, \ldots, u_d\}$. $u_1, \ldots, u_d, v$ הם בלתי תלויים, כי כפי שראינו בכיתה, בסדרה תלויה לינארית של וקטורים קיים וקטור שנפרש ע"י קודמיו. אולם u_k אינו נפרש ע"י $u_1, \ldots, u_{k-1}$ כי אלו איברי בסיס, ואילו v אינו נפרש ע"י $u_1, \ldots, u_d$ מהגדרת v. לכן מצאנו $d+1$ וקטורים $u_1, \ldots, u_d, v$ במרחב V שמימדו הוא d, וזו סתירה. לכן בהכרח $U = V$.

ג) נניח כי F הוא תת־שדה של $\mathbb{C}$ המקיים $\mathbb{R} \subseteq F \subseteq \mathbb{C}$. נראה כי $F = \mathbb{R}$ או $F = \mathbb{C}$. נזכור כי אם שדה L מוכל בשדה K אז K הוא מרחב וקטורי מעל L (עם החיבור של K, וכפל בסקלר שהוא פשוט הכפל ב K, כאשר חושבים על איברי L כאיברי K). לכן במקרה שלנו ההכלה $\mathbb{R} \subseteq F \subseteq \mathbb{C}$ היא הכלה של מרחבים וקטוריים מעל $\mathbb{R}$. משאלה 2 סעיף א' נובע כי מימד F מעל $\mathbb{R}$ הוא לכל היותר 2. אם מימדו 2 אז $\dim F = \dim \mathbb{C}$ ולכן מסעיף ב' נובע כי $F = \mathbb{C}$. אם מימדו 1 אז מסעיף ב' נובע כי $F = \mathbb{R}$, ולכן בכל מקרה $F = \mathbb{R}$ או $F = \mathbb{C}$.