# מבחן בקורס חשבון אינפיניטסימלי 1 (88-132)

# תשע"ט, מועד א'


מרצה: פרופ' מיכאל כץ.

מתרגל: דורון פרלמן.


משך המבחן: 3 שעות. יש לענות על כל השאלות 1-5.

מותר השימוש במחשבון מדעי (לא מחשבון המצייר פונקציות). כל חומר עזר פרט למחשבון – אסור.

**שימו לב: עליכם לנמק היטב את כל התשובות.**

**שאלה 1 (21 נקודות)**

א. (7 נק') יהיו $f, g$ פונקציות אשר לא רציפות ב-$x_0$. הוכיחו או הפריכו: $f + g$ לא רציפה ב-$x_0$.

הטענה לא נכונה. למשל נסתכל על

$f(x) = \begin{cases} 0 & x \neq 0 \\ 1 & \mathrm{x} = 0 \end{cases}$. אז f וגם f- לא רציפות ב-0, אבל סכומן הוא הפונקציה הקבועה 0 שכמובן רציפה ב-0.

ב. (7 נק') יהיו $a \approx a'$, $b \approx b'$ מספרים היפרממשיים. הוכיחו או הפריכו: $a + b \approx a' + b'$.

הטענה נכונה. הוכחה: $a \approx a'$ כלומר $a - a' = \epsilon$ באשר $\epsilon$

אינפיניטסימל, וכן $b \approx b'$ כלומר $b - b' = \delta$ באשר $\delta$ אינפיניטסימל.
כעת $a + b - (a' + b') = a - a' + b - b' = \epsilon + \delta$ כלומר $a + b \approx a' + b'$.

ג. (7 נק') תהי $f$ פונקציה ממשית גזירה ב-$(a,b)$ ותהי $x_0 \in (a,b)$ כך ש-$f''(x_0) = 0$. הוכיחו או הפריכו: $x_0$ לא נקודת קיצון מקומי של $f(x)$.

הטענה לא נכונה. למשל נסתכל על $f(x) = x^4$ אז $f''(x) = 12x^2$ כלומר $f''(0) = 0$ אך $0$ נקודת מינימום מקומי.

**שאלה 2 (22 נקודות)**

א. (11 נק') תהי $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ פונקציה גזירה ויהי $a \in \mathbb{R}$. נגדיר פונקציה חדשה:

$$g(x) = \begin{cases} \frac{f(x)\sin^2 x}{x} & x \neq 0 \\ a & x = 0 \end{cases}.$$

עבור אילו ערכי a הפונקציה $g(x)$ רציפה לכל $x$ ממשי? נמקו.

ראשית, עבור $x \neq 0$ הפונקציה $g(x)$ רציפה לכל ערך a. שנית, בנקודה x=0 הגבול הוא

$$lim_{x\to 0}\frac{f(x)sin^2 x}{x} = lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x} lim_{x\to 0} f(x)\sin x = 1 \cdot 0 = 0$$

באשר הגבול הימני הוא 0 כי $lim_{x\to 0}f(x)$ הוא מס' ממשי כי f גזירה לכן רציפה.
לכן כדי ש-g(x) תהיה רציפה ב-0 צריך להתקיים $a = 0$.

ב. (11 נק') עבור ערכי $a$ שמצאתם בסעיף א', הראו כי הפונקציה $g(x)$ גזירה בנקודה $x = 0$ וחשבו את נגזרתה שם (כלומר בטאו את התוצאה באמצעות הפונקציה $f(x)$).

$$g'(0) = lim_{x\to 0}\frac{\frac{f(x)sin^2 x}{x} - 0}{x} = lim_{x\to 0}\frac{f(x)sin^2 x}{x^2} =$$

$$lim_{x\to 0}\mathrm{f(x)}\cdot\left(lim_{x\to 0}\frac{sin\ x}{x}\right)^2 = f(0)\cdot 1^2 = f(0)$$

באשר המעבר הלפני אחרון הוא כי $f(x)$ גזירה ובפרט רציפה.

## **<u>שאלה 3 (22 נקודות)</u>**

א. (11 נק') הוכיחו כי לפולינום $f(x) = \frac{5}{7}x^7 + x^3 + x + 10$ יש שורש ממשי אחד בלבד.

$f(0) > 0$

$f(-2) < 0$

הפונקציה $f(x)$ רציפה בקטע $[-2{,}0]$ לכן לפי ערך הביניים יש $-2 < c < 0$ כך ש-$f(c) = 0$ כלומר הראנו שיש לפחות שורש ממשי אחד.

כמו כן, $f'(x) = 5x^6 + 3x^2 + 1 = 5(x^3)^2 + 3x^2 + 1 > 0$ בפרט הנגזרת לא מתאפסת בשום נקודה. לכן לפולינום יש לכל היותר שורש אחד כי לו היו לו 2 שורשים ביניהם הנגזרת היתה מתאפסת לפי משפט רול.

לכן לפולינום יש בדיוק שורש אחד.

ב. (11 נק') הוכיחו שלכל $0 < a < b < \frac{\pi}{2}$ מתקיים

$$\frac{b-a}{cos^2 a} < \mathrm{tan(b)} - \mathrm{tan(a)} < \frac{b-a}{cos^2 b}$$

הפונקציה $f(x) = tan(x)$ רציפה בקטע $[a, b]$ וגזירה בקטע $(a, b)$ כי $0 < a < b < \frac{\pi}{2}$. לכן לפי משפט לגרנז' קיימת $a < c < b$ כך ש-

$$\frac{1}{cos^2 c} = \frac{tan(b) - tan(a)}{b-a}$$

כעת, $a < c < b$ לכן $cos^2(a) > cos^2(c) > cos^2(b)$ (כי $y = cos(x)$ פונקציה יורדת בקטע $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$) לכן $\frac{1}{cos^2 a} < \frac{1}{cos^2 c} < \frac{1}{cos^2 b}$ כלומר $\frac{1}{cos^2 a} < \frac{tan(b) - tan(a)}{\mathrm{b-a}} < \frac{1}{cos^2 b}$, מש"ל.

## **שאלה 4 (22 נקודות)**

א. (11 נק')   חשבו את הגבול  $lim_{n\to\infty}\frac{\lfloor \pi n^2\rfloor}{n^2}$  (באשר $\lfloor x\rfloor$ היא פונקציית הערך השלם כלומר העיגול כלפי מטה של המס' הממשי $x$).

$$\pi n^2-1\le\lfloor \pi n^2\rfloor\le \pi n^2$$

לכן

$$\frac{\pi n^2-1}{n^2}\le\frac{\lfloor \pi n^2\rfloor}{n^2}\le\frac{\pi n^2}{n^2}$$

הסדרה הימנית היא הסדרה הקבועה $\pi$ *הסדרה השמאלית היא הסדרה* $\pi-\frac{1}{n^2}$ *השואפת ל-*$\pi$ *לכן לפי משפט הסנדויץ'* $lim_{n\to\infty}\frac{\lfloor \pi n^2\rfloor}{n^2}=\pi$.

ב. (11 נק')   חשבו את הגבול  $lim_{n\to\infty}\frac{arctan(n)\cdot ln\left(e^{7n}-6n\right)}{n}$.

$$lim_{x\to\infty}\frac{arctan(x)\cdot ln(e^{7x}-6x)}{x}=$$

$$lim_{x\to\infty}arctan(x)\cdot lim_{x\to\infty}\frac{ln(e^{7x}-6x)}{x}=$$

$$\frac{\pi}{2}lim_{x\to\infty}\frac{ln(e^{7x}-6x)}{x}=\frac{\pi}{2}lim_{x\to\infty}\frac{7e^{7x}-6}{e^{7x}-6x}=$$

$$\frac{\pi}{2}lim_{x\to\infty}\frac{49e^{7x}}{7e^{7x}-6}=\frac{\pi}{2}lim_{x\to\infty}\frac{343e^{7x}}{49e^{7x}}=\frac{7\pi}{2}$$

לכן גם $lim_{n\to\infty}\frac{arctan(n)\cdot ln\left(e^{7n}-6n\right)}{n}=\frac{7\pi}{2}$.

## **שאלה 5 (21 נקודות)**

עבור כל אחד מהטורים הבאים, קיבעו האם הוא מתכנס בהחלט, מתכנס בתנאי, או מתבדר:

א. (7 נק') $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\sqrt[n!]{n}}$

$$lim_{n\to\infty}\sqrt[n!]{n}=e^{lim\frac{ln(n)}{n!}}=e^0=1$$

לכן גם $\frac{1}{\sqrt[n!]{n}}\to 1$ לכן הטור לא מקיים את התנאי ההכרחי, כלומר הוא מתבדר.

ב. (7 נק') $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n\cdot 3^{(n^2)}}{(n!)^3}$

נשתמש במבחן המנה:

$$\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right|=\frac{3^{\left((n+1)^2\right)}}{\left((n+1)!\right)^3}\frac{(n!)^3}{3^{(n^2)}}=\frac{3^{2n+1}}{(n+1)^3}$$

הסדרה הזו שואפת ל-$\infty$ לכן הטור מתבדר.

ג. (7 נק') $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n\cdot n^{5779}}{(ln\,2019)^n}$

נשתמש במבחן השורש:

$$\sqrt[n]{|a_n|}=\frac{\left(\sqrt[n]{n}\right)^{5779}}{ln2019}\to\frac{1}{ln2019}<1$$

לכן הטור מתכנס בהחלט.

בהצלחה!