תמונה ותמונה הפוכה

תהי $f:X\to Y$ כלשהי. יהיו $A\subseteq X, B\subseteq Y$

הגדרה

- התמונה של $A\subseteq X$ היא $f\left(A\right)=\left\{ f\left(x\right)|x\in A\right\}$
- התמונה ההפוכה של B היא $f^{-1}\left(B\right)=\left\{ x\in X|f\left(x\right)\in B\right\}$
התמונה ההפיכה מוגדרת היטב גם אם הפונקציה אינה הפיכה

טענה

1. אם $A\subseteq B\subseteq Y$ אזי $f^{-1}\left(A\right)\subseteq f^{-1}\left(B\right)\subseteq X$
2. אם $A\subseteq B\subseteq X$ אזי $f\left(A\right)\subseteq f\left(B\right)\subseteq Y$

הוכחה

נוכיח רק את טענה 1. $f^{-1}\left(B\right)\subseteq X$ מקבלים מההגדרה - נותר להוכיח $f^{-1}\left(A\right)\subseteq f^{-1}\left(B\right)$.
יהי $x\in f^{-1}\left(A\right)$, אזי $f\left(x\right)\in A\Leftarrow f\left(x\right)\in B\Leftarrow x\in f^{-1}\left(B\right)$

טענה

$$f^{-1}\left(\bigcup_{i\in I}B_{i}\right)=\bigcup_{i\in I}f^{-1}\left(B_{i}\right)$$

הוכחה

$\supseteq$ $\quad$ $\forall_{j\in I}\bigcup_{i\in I}B_{i}\supseteq B_{j}\Leftarrow f^{-1}\left(\bigcup_{i\in I}B_{i}\right)\supseteq f^{-1}\left(B_{j}\right)$. לכן,

$$f^{-1}\left(\bigcup_{i\in I}B_{i}\right)\supseteq\bigcup_{i\in I}f^{-1}\left(B_{i}\right)=\bigcup_{j\in I}f^{-1}\left(B_{j}\right)$$

$\subseteq$ $\quad$ יהי $x\in f^{-1}\left(\bigcup_{i\in I}B_{i}\right)$, אזי $f\left(x\right)\in\bigcup_{i\in I}B_{i}$. לכן קיים i_{0} כך ש $f\left(x\right)\in B_{i_{0}}$

$$\Rightarrow x\in f^{-1}\left(B_{i_{0}}\right)\subseteq\bigcup_{i\in I}f^{-1}\left(B_{i}\right)$$

טענה

$$\bigcap_{i\in I} f^{-1}(B_i) = f^{-1}\left(\bigcap_{i\in I} B_i\right)$$

הוכחה

$\supseteq$ $\forall_i B_i \supseteq \bigcap_{i\in I} B_i \Leftarrow f^{-1}(B_i) \supseteq f^{-1}\left(\bigcap_{i\in I} B_i\right)$, לכן $\bigcap_{i\in I} f^{-1}(B_i) \supseteq f^{-1}\left(\bigcap_{i\in I} B_i\right)$

$\subseteq$ יהי $x \in \bigcap_{i\in I} f^{-1}(B_i) \Leftarrow \forall_{i\in I} x \in f^{-1}(B_i)$. מכאן $\forall_{i\in I} f(x) \in B_i \Leftarrow$ $f(x) \in \bigcap_{i\in I} B_i$. לכן $x \in f^{-1}\left(\bigcap_{i\in I} B_i\right)$

טענה

1. $f\left(\bigcup_{i\in I} A_i\right) = \bigcup_{i\in I} f(A_i)$
2. **<u>לא</u>** בהכרח מתקיים $\bigcap_{i\in I} f(A_i) = f\left(\bigcap_{i\in I} A_i\right)$(למרות שקיימת הכלה $\subseteq$)

הוכחה

1 מוכיחים בדומה למה שהוכחנו לגבי f^{-1}.
ניתן דוגמה נגדית ל2. קחו A_1, A_2 זרות, וf פונקציה קבועה.

מרחבים מטריים(מ"מ)

הגדרה

תהי M קבוצה כלשהי ונניח שמוגדרת פונקציה $d : M \times M \to [0,\infty)$ המקיימת:

1. $x = y \Leftrightarrow d(x,y) = 0 \qquad \forall_{x,y\in M}$
2. $d(x,y) = d(y,x) \qquad \forall_{x,y\in M}$ - סימטריה
3. $d(x,z) \le d(x,y) + d(y,z) \qquad \forall_{x,y,z\in M}$ - אי שוויון המשולש

במקרה זה, נאמר ש(M,d) הוא מרחב מטרי וd מטריצה על M.

הערה

מהתכונות הנ"ל (1-3) אפשר להוכיח ש$\forall_{x,y\in M} d(x,y) \ge 0$

הגדרה - מרחב נורמי(מ"נ)

יהי X מ"ו(מרחב וקטורי) מעל $\mathbb{R}$ או $\mathbb{C}$. פונקציה $\|\cdot\| : X \to [0, \infty)$ המקיימת:

1. $\|v\| = 0 \Leftrightarrow v = \vec{0} \qquad \forall_{v \in X}$
2. $|\alpha| \, \|v\| \qquad \forall_{v \in X}$
3. $\|v + w\| \leq \|v\| + \|w\| \qquad \forall_{v,w \in X}$

נקראת נורמה, ו$(X, \|\cdot\|)$ נקרא מרחב נורמי

כל מרחב נורמי הוא למעשה גם מרחב מטרי לפי $d(x, y) = \|x - y\|$

תרגיל

הוכיחו שבמרחב הוקטורי של סדרות ממשיות חסומות

$$X := \left\{ (x_n)_{n \in \mathbb{N}} \middle| \forall_n x_n \in \mathbb{R}, \sup \{ |x_n| | n \in \mathbb{N} \} < \infty \right\}$$

הפונקציה $\left\| (x_n)_{n \in \mathbb{N}} \right\| = \sup\limits_{n \in \mathbb{N}} \{ |x_n| \}$ היא נורמה.

הערה: מרחב זה מסומן L_∞

הוכחה

1. נניח $x = (x_n)_{n \in \mathbb{N}}$.

$$\|x\| = 0 \, (\Rightarrow \sup \{ |x_n| | n \in \mathbb{N} \} = 0)$$

$$\Leftrightarrow \forall_n x_n = 0 \Leftrightarrow x = (x_n)_{n \in \mathbb{N}} \Rightarrow \vec{0} = (0, 0, ...)$$

2.

$$\left\| \alpha \, (x_n)_{n \in \mathbb{N}} \right\| = \left\| (\alpha x_n)_{n \in \mathbb{N}} \right\| = \sup \{ |\alpha x_n| | n \in \mathbb{N} \} =$$

$$= \sup \{ |a| \, |x_n| | n \in \mathbb{N} \} = |\alpha| \sup \{ |x_n| | n \in \mathbb{N} \} = |\alpha| \, \|x\|$$

3.

$$\forall_{m \in \mathbb{N}} \, |x_m + y_m| \leq |x_m| + |y_m| \leq \sup \{ |x_n| | n \in \mathbb{N} \} + \sup \{ |y_n| | n \in \mathbb{N} \}$$

לכן

$$\sup \{ |x_n + y_n| | n \in \mathbb{N} \} \leq \sup \{ |x_n| | n \in \mathbb{N} \} + \sup \{ |y_n| | n \in \mathbb{N} \}$$

לכן

$$\|(x_n)+(y_n)\| \leq \|(x_n)\|+\|(y_n)\|$$

התכנסות של סדרות

הגדרה - סדרה מתכנסת

יהי M מרחב מטרי ותהי $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ סדרת נקודות בM. נאמר ש$\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ מתכנסת ל$x\in M$(לפי המטריקה d) אם לכל $\epsilon>0$ קיים $n_0\in\mathbb{N}$ כך שלכל $n\geq n_0$, $d\left(x_n,x\right)<\epsilon$.

הגדרה שקולה להתכנסות

$$d\left(x_n,x\right)\xrightarrow{n\to\infty}0\Leftrightarrow x_n\xrightarrow{d}x$$

תרגיל

תהי $\{e_n\}$סדרה במרחב L_∞. הוכיחו שהסדרה אינה מתכנסת במרחב זה למרות שהיא מתכנסת "רכיב רכיב".

(e_n סדרה אינסופית שכל רכיביה אפסים פרט ל1 במקום הn)

הוכחה

לכל רכיב, הסדרה $\{e_m\}$ קבועה לבסוף(מקבלת את הערך 0). סדרה קבועה לבסוף מתכנסת לכל מ"מ(תרגיל).

הסדרה <u>לא</u> מתכנסת בL_∞שכן אינה סדרת קושי - אם $n\neq m$, $\|e_n-e_m\|=1$.

מטריקה a-אדית

הגדרה - המטריקה הa-אדית($a-\mathrm{adic}$)

עבור $1\neq a\in\mathbb{N}$ נגדיר את המטריקה הa-אדית מעל $\mathbb{Z}$:

$$d_a\left(x,y\right)=\begin{cases}0 & x=y\\ \dfrac{1}{a^{k(x,y)}} & x\neq y\end{cases}$$

כאשר

$$k(x,y)=\max\left\{i\in\mathbb{N}\cup\{0\}\middle|a^i|(x-y)\right\}$$

תרגיל

(א) חשבו את $d_3(20,2)$

פתרון:

$$20-2=18$$

$$1=3^0|18,\qquad 3=3^1|18,\qquad 3^2|18,\qquad 3^3\nmid 18$$

$$k(20,2)=2$$

$$d_2(20,2)=\frac{1}{3^2}=\frac{1}{9}$$

(ב) תארו את $B_{d_3}\left(0,\frac{2}{5}\right), B_{d_3}\left[0,\frac{2}{5}\right]$

תזכורת:

- $B_d(x,r)=\{x\in X|d(a,x)<r\}$ (כדור פתוח)
- $B_d[x,r]=\{a\in X|d(a,x)\leq r\}$(כדור סגור)

פתרון

המרחקים האפשריים במטריקה 3-אדית הם ... $0,1,\frac{1}{3},\frac{1}{3^2},\frac{1}{3^3},$

$$\frac{1}{3}=\frac{2}{6}<\frac{2}{5}<1=\frac{1}{30}$$

מכאן

$$B_{d_3}\left(0,\frac{2}{5}\right)=B_{d_3}\left[0,\frac{2}{5}\right]=B_{d_3}(0,1)$$

ההכלה ברורה, אבל למה שוויון? הסיבה לכך היא שנוספו מרחקים לא אפשריים - $\frac{2}{5}$ אינה חזקה של $\frac{1}{3}$, ובין $\frac{2}{5}$ לו1 אין חזקה של $\frac{1}{3}$.

נניח $x \in B_{d_3}(0,1)$, אזי $x=0$, או $\frac{1}{3^0} = 1 < \frac{1}{3^{k(x,0)}}$.
נניח $x \neq 0$. $\frac{1}{3^0} < \frac{1}{3^{k(x,0)}}$.

$$3^1 | (x-0) \Leftrightarrow k(x,0) \geq 1 \Leftrightarrow k(x,0) > 0$$

$$x \in 3\mathbb{Z}$$

קל לראות שגם $x=0$ מקיים $x \in 3\mathbb{Z}$
הראנו ש$B_{d_3}(0,1) \subseteq 3\mathbb{Z}$. ניתן להוכיח גם את ההכלה ההפוכה.
לכן התשובה היא $3\mathbb{Z}$

המשך תרגיל

(ג) יהי $0 \neq x \in B_{d_3}(0,1)$. הראו ש$B_{d_3}(0,1) = B_{d_3}(x,1)$
(במ"מ זה נק' בכדור פתוח יכולה להחליף את המרכז)

הוכחה

נוכיח רק את ההכלה $B_{d_3}(0,1) \subseteq B_{d_3}(x,1)$.
יהי $y \in B_{d_3}(0,1)$.

- אפשרות א' - $y=0$. מתקיים $0 \neq x \in B_{d_3}(0,1) \Leftarrow d_3(x,0) < 1 \Leftarrow y = 0 \in$ $B_{d_3}(x,1)$
- אפשרות ב' - $y \neq 0$. $\frac{1}{3^{k(y,0)}} < 1 \Leftarrow 3|y \Leftarrow$ (הטיעונים בסעיף הקודם).
מצד שני, $x \in B_{d_3}(0,1) \Leftarrow 3|x$.
לכן $3|(x-y) \Leftarrow$ או $x=y$ או $k(x,y) > 0$.

– אם $k(x,y) > 0 \Leftarrow 1 = \frac{1}{3^0} < \frac{-1}{3^{k(x,y)}}$

כמו כן, אם $x = y \Leftarrow d_3(x,y) < 1$ ובסה"כ $y \in B_{d_3}(x,1)$

המשך תרגיל

(ד) הוכיחו כי $2 \cdot 3^n + 5 \xrightarrow{d_3} 5$

פתרון

$$d_3(2 \cdot 3^n + 5, 5) = \frac{1}{3^n} \xrightarrow{n \to \infty} 0$$

תרגיל

מצאו מ"מ (X,d) בו קיימים כדורים שונים $B(a_1,r_1), B(a_2,r_2)$ כאשר $r_1<r_2$ אבל $B(a_2,r_2) \supseteq B(a_1,r_1)$. תארו את הכדורים.

פתרון

ניקח $x=[0,\infty)$ עם המטריקה המושרית מ$\mathbb{R}$.

$$B(1,5)=[0,6)$$

$$B(3,4)=[0,7)$$

$$B(1,5)\subseteq B(3,4)$$

קיבלנו הכלה כי המרחב חסום, ולכן הוא "חותך" חלק מהקבוצה של הכדור הראשון, למרות הרדיוס היותר גדול שלו.