פתרון תרגיל בית 9 במבוא לתורת החבורות
סמסטר א' תש"ף

שאלה 1. תהי G חבורה.

א. הוכיחו כי לכל $H \lhd G$, G פועלת ע"י הצמדה על H, וכי הפעולה לא בהכרח נאמנה.

ב. האם חֶזקה היא פעולה של $\mathbb{Z}$ על G (כאן G על תקן הקבוצה)? אם כן, האם היא נאמנה?

ג. הוכיחו שאם $G = S_4$, אז הפעולה (הרגילה) שלה על $F[x_1, x_2, x_3, x_4]$ נאמנה (רמז: הוכח בעל-פה בתרגול).

פתרון.

א. לכל $x, y \in G$ ולכל $h \in H$, מתקיים: $x * (y * h) = x * (yhy^{-1}) = xyhy^{-1}x^{-1} = (xy) * h$.
כמו כן, לכל $h \in H$, מתקיים: $e * h = ehe^{-1} = h$. לכן זו פעולה של חבורה על קבוצה.
הפעולה לא בהכרח נאמנה כי אם המרכז של G אינו טריוויאלי (בפרט אם היא אבלית), אז כל איבר במרכז פועל טריוויאלית, כלומר: שולח כל איבר לעצמו ע"י הפעולה (כמו e).

ב. בדיקה של האקסיומות מראה במהירות שחזקה אינה פעולה של חבורה על קבוצה, למשל: לכל $e \neq g \in G$, מתקיים: $e_{\mathbb{Z}} * g = 0 * g = g^0 = e \neq g$. גם האקסיומה השנייה לא מתקיימת בד"כ.

ג. רק תמורת הזהות פועלת טריוויאלית על הפולינום $x_1 + x_2^2 + x_3^3 + x_4^4$ כי כל החלפה של המשתנים תתן פולינום ששונה מזה.

שאלה 2. תהי G חבורה. נאמר כי $H, K \leq G$ הן תתי-חבורות צמודות אם קיים $g \in G$ כך ש- $gHg^{-1} = K$. הוכיחו:

א. לכל $g \in G$, $gHg^{-1} \leq G$, כלומר: הצמדה לת"ח אכן נותנת ת"ח.

ב. G פועלת על אוסף תתי החבורות שלה ע"י הצמדה. האם הפעולה בהכרח נאמנה?

ג. (רשות) הליבה של H: $\mathrm{Core}(H) := \bigcap_{g \in G} gHg^{-1}$ היא תת-החבורה הנורמלית הגדולה ביותר של G שמוכלת ב-H (שימו לב שיש כאן כמה דברים להוכיח).
הערה: הליבה היא גרעין ההומומורפיזם המשמש להוכחת העידון של משפט קיילי.

פתרון.

א. יהי $g \in G$. כיוון ש-H ת"ח, $e_G \in H$ ולכן $e = geg^{-1} \in gHg^{-1}$.
יהיו $x, y \in H$. מתקיים: $(gxg^{-1})(gyg^{-1})^{-1} = (gxg^{-1})(gy^{-1}g^{-1}) = gxy^{-1}g^{-1} \in gHg^{-1}$ מאחר ש-$xy^{-1} \in H$.
לכן, לפי הקריטריון המקוצר לת"ח, $gHg^{-1} \leq G$.

ב. הפעולה לא בהכרח נאמנה. למשל אם G אבלית, כל ת"ח שלה היא נורמלית, ולכן הצמדה לא תשנה אותה, כלומר: כל איבר ב-G יפעל טריוויאלית על כל ת"ח $H \lhd G$.

שאלה 3. תהי G חבורה.

א. נתון שיש $g \in G$ שבמחלקת הצמידות שלו יש שני איברים בדיוק. הוכיחו כי יש ל-G ת"ח נורמלית לא טריוויאלית (רמז: ת"ח מאינדקס 2).

ב. הוכיחו שאם $|G| = 8$, אז יש ל-G ת"ח נורמלית לא טריוויאלית.

פתרון.

א. לפי משפט מסלול מייצב, $[G : C_G(g)] = |\operatorname{conj}(g)| = 2$ מפני שבפעולת ההצמדה מייצב הוא מרכז ומסלול הוא מחלקת צמידות. לכן $C_G(g)$ היא ת"ח מאינדקס 2 של G ולכן נורמלית לא טריוויאלית בה
(אלא אם $|G| = 2$ אך זה לא ייתכן לפי הנתון, חשבו למה).

ב. נחלק למקרים: אם קיים ב-G איבר מסדר 8, אז החבורה ציקלית ולכן אבלית, ואז כל ת"ח שלה נורמלית. יש לה ת"ח לא טריוויאלית כי לפי משפט קושי, יש בה איבר מסדר 2, והוא יוצר ת"ח מסדר 2.
אם קיים איבר מסדר 4, אז הוא יוצר ת"ח מאינדקס 2, שהיא נורמלית ולא טריוויאלית.
אחרת, כל האיברים בחבורה שאינם e הם מסדר 2, אך אז לפי תרגיל מתחילת הקורס, החבורה אבלית, ונמשיך כמו במקרה הראשון.

שאלה 4. תהי G חבורה פשוטה אינסופית. הוכיחו כי:

א. לכל $H \leq G$, מתקיים: $[G : H] = 1$ או $[G : H] = \infty$.

ב. G אינה אבלית (ניתן להוכיח אפילו שכל חבורה אבלית פשוטה היא ציקלית מסדר ראשוני, בפרט סופית).

ג. לכל איבר $e \neq g \in G$ יש אינסוף איברים צמודים.

ד. (רשות) הוכיחו שאם $G_1 \subseteq G_2 \subseteq G_3 \subseteq \ldots$ שרשרת עולה של חבורות פשוטות ו-$G = \bigcup_i G_i$, אז G גם חבורה פשוטה.
זוהי למעשה דרך לייצר חבורה פשוטה אינסופית מחבורות פשוטות סופיות.
הערה: איחוד שרשרת עולה של חבורות (כלשהן) היא תמיד חבורה, זה לא טריוויאלי, מוזמנים להוכיח.

פתרון.

א. נניח ש-$[G : H] = n > 1$ עבור $n \in \mathbb{N}$ כלשהו. לפי העידון של משפט קיילי וכיוון ש-G פשוטה, קיים שיכון של G ב-S_n, אך זה לא ייתכן כיוון ש-G אינסופית. לכן $[G : H] = 1$ או $[G : H] = \infty$.

ב. נניח בשלילה ש-G אבלית. יהי $e \neq g \in G$. נסתכל על $\langle g \rangle \leq G$. לפי ההנחה ש-G אבלית, זוהי ת"ח נורמלית ולכן $G = \langle g \rangle$, אחרת זו סתירה לפשטות של G.
אם כן, G חבורה ציקלית אינסופית ולכן איזומורפית ל-$\mathbb{Z}$, אך $\mathbb{Z}$ אינה פשוטה (לכל $n \in \mathbb{N}$, $n\mathbb{Z}$ היא ת"ח נורמלית שלה), סתירה. מכאן ש-G אינה אבלית.

ג. נניח בשלילה שקיים $e \neq g \in G$ שיש לו $n < \infty$ איברים צמודים. לפי משפט מסלול-מייצב, $[G : C_G(g)] = |\operatorname{conj}(g)| = n$ מפני שבפעולת ההצמדה מייצב הוא מרכז ומסלול הוא מחלקת צמידות.
אם $1 < n < \infty$, נקבל סתירה לסעיף א' עבור $H = C_G(g) \leq G$. אם $n = 1$, אז g צמוד רק לעצמו, וזה קורה אמ"מ $g \in Z(G)$ לפי טענה שראינו.
אם כן, $Z(G)$ אינו טריוויאלי. כיוון ש- $Z(G) \lhd G$ ו-G פשוטה, בהכרח $Z(G) = G$, כלומר: G אבלית, אך זוהי סתירה לסעיף ב'. לכן לכל $e \neq g \in G$ יש אינסוף צמודים.

שאלה 5. תהי G חבורת-p סופית הפועלת על קבוצה X. הוכיחו שאם $p \nmid |X|$, אז קיימת ב-X נקודת שבת (כלומר: איבר $x \in X$ כך שלכל $g \in G$, $g * x = x$).

רמז: זו הכללה של תרגיל שפתרנו בתרגול, הרעיון זהה.

פתרון. לפי משוואת המחלקות, מתקיים: $|X| = |\text{Fix}(X)| + \sum_{x_i \in X} |\text{orb}(x_i)|$ כאשר $\text{Fix}(X)$ היא קבוצת נקודות השבת של X וסכימת גדלי המסלולים מתבצעת על נציגים שלהם (ולא על כל האיברים).

לפי מסקנה ממשפט מסלול-מייצב, גודל כל מסלול מחלק את סדר החבורה, ולכן מתחלק ב-p כש-G חבורת-p סופית.

אם לא היתה ב-X נקודת שבת, היינו מקבלים שאגף ימין מתחלק ב-p ולכן גם אגף שמאל, בסתירה לנתון. לכן קיימת ב-X נקודת שבת.

שאלה 6. נתבונן בתתי־חבורות סילו של S_n.

א. מצאו את הסדרים של כל תתי־חבורות סילו של S_5.

פתרון. ידוע לנו כי $|S_5| = 5! = 2^3 \cdot 3 \cdot 5$. לכן (כל) תת־חבורת 2-סילו של S_5 היא מסדר 8, תת־חבורת 3-סילו היא מסדר 3, תת־חבורת 5-סילו היא מסדר 5 וכל השאר הן טריוויאליות.

ב. יהי p ראשוני ותהי $P \leq S_p$ תת־חבורת p-סילו. הוכיחו כי P אבלית.

פתרון. החזקה הגבוהה ביותר של p שמחלקת את $|S_p| = p!$ היא כמובן p. לכן $|P| = p$, וכל חבורה מסדר ראשוני היא ציקלית, ולכן אבלית.

בהצלחה!