

תרגיל 6

1. נתבונן בבעיית לפלס במלבן  $D$ :

$$\begin{cases} u_{xx} + u_{yy} = 0, & 0 < x, y < \pi \\ u_y(x, \pi) = \sin^2(x) - \alpha, & 0 \leq x \leq \pi \\ u_y(x, 0) = 0, & 0 \leq x \leq \pi \\ u_x(0, y) = u_x(\pi, y) = 0, & 0 \leq y \leq \pi \end{cases}$$

א. עבור אילו ערכים של  $\alpha$  קיים פתרון לבעיה?

ב. פתור את הבעיה, האם הפתרון יחיד?

2. פתור את בעיית לפלס במלבן  $D$ :

$$\begin{cases} u_{xx} + u_{yy} = 0, & 0 < x, y < \pi \\ u(x, 0) = \sin(x), & 0 \leq x \leq \pi \\ u(x, \pi) = 0, & 0 \leq x \leq \pi \\ u(0, y) = 0, & 0 \leq y \leq \pi \\ u(\pi, y) = \sin(2y), & 0 \leq y \leq \pi \end{cases}$$

3. פתור את בעיית לפלס בעיגול:

$$\begin{cases} u_{xx} + u_{yy} = 0, & x^2 + y^2 < 1 \\ u(x, y) = y(x - y) & x^2 + y^2 = 1 \end{cases}$$

4. פתור את בעיית לפלס בעיגול:

$$\begin{cases} u_{xx} + u_{yy} = 0, & x^2 + y^2 < 4 \\ \frac{\partial u}{\partial \bar{n}} = xy & x^2 + y^2 = 4 \end{cases}$$

א. מצא את המקסימום ואת המינימום של  $u(x, y)$  בתחום  $x^2 + y^2 \leq 4$ .  
 כאשר  $\frac{\partial u}{\partial \bar{n}}$  היא הנגזרת המכוונת של  $u(x, y)$  בכיוון ניצב למעגל.

ב. מצא את  $u(x, y)$ .

5. נתבונן בבעיית לפלס בעיגול:

$$\begin{cases} u_{xx} + u_{yy} = 0, & x^2 + y^2 < 4 \\ \frac{\partial u}{\partial \bar{n}} = \alpha - y^2 & x^2 + y^2 = 4 \\ \int_0^{2\pi} u(2 \cos \theta, 2 \sin \theta) = \beta \end{cases}$$

א. מצא עבור אילו ערכים של  $\alpha$  ו- $\beta$  קיים פתרון לבעיה.  
 ב. עבור כל ערכי  $\alpha$  ו- $\beta$  עבורם קיים פתרון, מצא פתרון.