פתרון תרגיל 8 – מבוא לאנליזה 1

1. נוכיח לפי ההגדרה כי הפונקציה $f(x)=x^2$ רציפה במ"ש בקטע $[0,3]$:
צ"ל שלכל $\varepsilon>0$ קיימת $\delta>0$ כך שלכל $x_1,x_2\in[0,3]$, אם $|x_1-x_2|<\delta$ אז $|x_1^2-x_2^2|<\varepsilon$.
נשים לב:

$$|x_1^2-x_2^2|=|x_1+x_2|\cdot|x_1-x_2|\le(|x_1|+|x_2|)\cdot|x_1-x_2|\le(3+3)\cdot|x_1-x_2|<6\delta$$

ולכן נבחר $\delta=\dfrac{\varepsilon}{6}$.
פורמלית: בהינתן $\varepsilon>0$, נבחר $\delta=\dfrac{\varepsilon}{6}>0$, ואז לכל $x_1,x_2\in[0,3]$, אם $|x_1-x_2|<\delta$ אז

$$|x_1^2-x_2^2|=|x_1+x_2|\cdot|x_1-x_2|\le(|x_1|+|x_2|)\cdot|x_1-x_2|\le 6\cdot|x_1-x_2|<6\delta=\varepsilon$$

כדרוש.

2. **כן**. הפונקציה $f(x)=\dfrac{x^2+sin(x)}{1+e^x}$ היא פונקציה רציפה בקטע הסגור $[-10,10]$ כמנה של פונקציות רציפות (שימו לב שלכל $x\in\mathbb{R}$, $e^x>0$ ולכן המכנה לא מתאפס). לכן לפי משפט קנטור היא רציפה שם במידה שווה.

3. נוכיח כי למשוואה $3^x-5x+1=0$ יש פתרון בקטע $[0,1]$:
הפונקציה $f(x)=3^x-5x+1$ רציפה בקטע $[0,1]$ ומקיימת:

$$f(0)=3^0-5\cdot0+1=2$$

$$f(1)=3^1-5\cdot1+1=-1$$

לפי משפט ערך הביניים קיימת נקודה $0<x_0<1$ כך ש־$f(x_0)=0$, ז"א קיים פתרון $x_0\in(0,1)$ למשוואה $3^x-5x+1=0$.

4. הוכחה: נגדיר פונקציה חדשה $h:[0,1]\to\mathbb{R}$ ע"י $h(x)=f(x)-g(x)$.
הפונ' $h(x)$ רציפה ב־$[0,1]$ כהפרש של פונקציות רציפות, ולפי הנתון מתקיים

$$h(0)=f(0)-g(0)<0$$

$$h(1)=f(1)-g(1)>0$$

לפי משפט ערך הביניים, קיימת נקודה $x_0\in(0,1)$ כך ש־$h(x_0)=0$, כלומר $f(x_0)=g(x_0)$, כדרוש.

5. הוכיחו או הפריכו:

(א) אם $f:[0,1]\to\mathbb{R}$ רציפה וחיובית, אז קיים $m>0$ כך ש־$f(x)\ge m$ לכל $x\in[0,1]$.
נכון. הוכחה: הפונקציה $f(x)$ רציפה בקטע הסגור $[0,1]$, לכן לפי המשפט השני של ויירשטראס מקבלת בו מינימום, נניח בנקודה $x_0\in[0,1]$. נסמן $m=f(x_0)$. כיוון ש־$f(x)$ חיובית, $m>0$, וכיוון שזהו המינימום של $f(x)$ בקטע, נובע שלכל $x\in[0,1]$ מתקיים $f(x)\ge m$.

(ב) אם $f:(0,1)\to\mathbb{R}$ רציפה, חסומה וחיובית, אז קיים $m>0$ כך ש־$f(x)\ge m$ לכל $x\in(0,1)$.
לא נכון. דוגמא נגדית: הפונקציה $f(x)=x$ בקטע $(0,1)$ רציפה, חסומה (בין 0 ל־1) וחיובית, אבל לא קיים $m>0$ כך ש־$f(x)\ge m$ לכל $x\in(0,1)$: נניח בשלילה שקיים $m>0$ כזה. ניקח $x_0\in(0,1)$ כך ש־$x_0<m$. אז $f(x_0)=x_0<m$, בסתירה לכך ש־$f(x_0)\ge m$.

(ג) אם $f:[0,\infty)\to\mathbb{R}$ רציפה ומקיימת $\lim\limits_{x\to\infty} f(x)=0$, אז $f(x)$ חסומה בקרן $[0,\infty)$.

נכון. הוכחה: $\lim\limits_{x\to\infty} f(x)=0$, לכן קיים $a>0$ כך שלכל $x>a$ מתקיים $|f(x)-0|<1$, כלומר $-1<f(x)<1$ והפונקציה $f(x)$ חסומה בקרן (a,∞). הקטע הנותר $[0,a]$ הוא קטע סגור ו־$f(x)$ רציפה בו, ולפי המשפט הראשון של ויירשטראס היא חסומה בו, ז"א קיימים $m,M\in\mathbb{R}$ כך ש־$m\le f(x)\le M$ לכל $x\in[0,a]$. בסה"כ נקבל שהפונקציה חסומה בקרן $[0,\infty)$: לכל $x\in[0,\infty)$ מתקיים $min\{-1,m\}\le f(x)\le max\{1,M\}$.