פתרון תרגיל 6 אינפי 4

6 במאי 2015

1. ראשית נבין מהו המשטח $x^2+y^2=2ax$. ע"י השלמה לריבוע נקבל:

$$(x-a)^2+y^2=a^2$$

וזהו גליל, עם ציר לאורך $(a,0,z)$ ורדיוס a.

כעת, המשטח שלנו ניתן להטלה: $z(x,y)=\sqrt{x^2+y^2}$. פרמטריזציה של המשטח היא: $\phi(x,y)=(x,y,\sqrt{x^2+y^2})$ הנגזרות החלקיות הן:

$$z_x=\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}, z_y=\frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}}$$

ולכן אלמנט השטח הוא:

$$\|\phi_x\times\phi_y\|=\sqrt{1+z_x^2+z_y^2}=\sqrt{1+\frac{x^2}{x^2+y^2}+\frac{y^2}{x^2+y^2}}=\sqrt{2}$$

כעת הפונקציה שלנו היא: $f(x,y,z)=xy+yz+xz$ ולכן:

$$f(\phi(x,y))=xy+(x+y)\sqrt{x^2+y^2}$$

והאינטגרל שלנו הוא:

$$\iint\limits_S(xy+yz+xz)dS=\iint\limits_D(xy+(x+y)\sqrt{x^2+y^2})\sqrt{2}dxdy$$

מהו התחום D שלנו?

זהו מעגל שרדיוסו a ומרכזו בנקודה $(a,0)$, כמו שראינו. אם נעבור לקואורדינטות קוטביות:

$$x=r\cos\theta, y=r\sin\theta$$

נקבל שהתחום $x^2+y^2=2ax$ נותן לנו: $0\le r\le 2a\cos\theta$. הזווית שלנו במקרה הזה נמצאת בתחום $-\frac{\pi}{2}\le\theta\le\frac{\pi}{2}$.
היעקוביאן הוא r, ולכן:

$$\iint\limits_D = \int\limits_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \int\limits_0^{2a\cos\theta} (r^2\cos\theta\sin\theta + r^2\cos\theta + r^2\sin\theta)\sqrt{2}r dr d\theta =$$

$$\sqrt{2}\int\limits_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}(\cos\theta\sin\theta+\cos\theta+\sin\theta)(\int\limits_0^{2a\cos\theta} r^3 dr)d\theta = 4\sqrt{2}a^4\int\limits_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}(\cos\theta\sin\theta+\cos\theta+\sin\theta)\cos^4\theta d\theta =$$

$$= 4\sqrt{2}a^4\int\limits_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}(\cos^4\theta+\cos^5\theta)\sin\theta d\theta + 4\sqrt{2}a^4\int\limits_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\cos^5\theta d\theta$$

האינטגרל השמאלי מתאפס, כאינטגרל של פונקציה אי זוגית בקטע סימטרי ביחס לראשית.
כדי לחשב את האינטגרל השני נשתמש בזהויות:

$$\int\limits_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\cos^5\theta d\theta = \int\limits_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}(1-\sin^2\theta)^2\cos\theta d\theta = \int\limits_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}(1-2\sin^2\theta+\sin^4\theta)\cos\theta d\theta =$$

$$= (\sin\theta - \frac{2\sin^3\theta}{3} + \frac{\sin^5\theta}{5})|_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} = 2\cdot(1-\frac{2}{3}+\frac{1}{5}) = \frac{16}{15}$$

ולכן האינטגרל שלנו הוא:

$$\iint\limits_S (xy+yz+xz)dS = 4\sqrt{2}a^4\int\limits_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\cos^5\theta d\theta = \frac{64\sqrt{2}a^4}{15}$$

2. הצגה פמטרית של המשטח שלנו (בקואורדינטות ספריות) היא:

$$\phi(\psi,\theta) = (a\cos\psi\sin\theta, a\sin\psi\sin\theta, a\cos\theta)$$

כאשר $0\le\theta,\psi,\le\frac{\pi}{2}$.
וקטורי הנגזרות הם:

$$\phi_\psi = (-a\sin\psi\sin\theta, a\cos\psi\sin\theta, 0)$$

$$\phi_\theta = (a\cos\psi\cos\theta, a\sin\psi\cos\theta, -a\sin\theta)$$

המכפלה הוקטורית תהיה:

$$\phi_\psi \times \phi_\theta = \begin{vmatrix} i & j & k \\ -a\sin\psi\sin\theta & a\cos\psi\sin\theta & 0 \\ a\cos\psi\cos\theta & a\sin\psi\cos\theta & -a\sin\theta \end{vmatrix} =$$

$$= i\cdot(-a^2\cos\psi\sin^2\theta) - j\cdot(a^2\sin\psi\sin^2\theta) + k\cdot(-a^2\cos\theta\sin\theta(\cos^2\psi+\sin^2\psi))$$

ולכן אלמנט השטח שלנו הוא:

$$\|\phi_\psi \times \phi_\theta\| = \sqrt{a^4\cos^2\psi\sin^4\theta + a^4\sin^2\psi\sin^4\theta + a^4\cos^2\theta\sin^2\theta} = a^2\sin\theta$$

הפונקציה שלנו היא $f(x,y,z)=x$ ולכן $f(\phi(\psi,\theta)) = a\cos\psi\sin\theta$, והאינטגרל שלנו יהיה:

$$\iint_S x dS = \iint_D a\cos\psi\sin\theta \cdot a^2\sin\theta d\psi d\theta =$$

התחום D שלנו הוא $0 \le \theta, \psi, \le \frac{\pi}{2}$ ולכן:

$$\iint_D = a^3 \int_0^{\frac{\pi}{2}}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos\psi\sin^2\theta d\psi d\theta = a^3\cdot(\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos\psi d\psi \cdot \int_0^{\frac{\pi}{2}}(\frac{1-\cos 2\theta}{2})d\theta) =$$

$$= \frac{a^3}{2}\cdot(\sin\psi)|_0^{\frac{\pi}{2}} \cdot (\theta - \frac{\sin 2\theta}{2})|_0^{\frac{\pi}{2}} = \frac{a^3\pi}{4}$$

וזהו האינטגרל שלנו.

3. פרמטריזציה של המשטח כבר נתונה לנו.

וקטורי הנגזרות הם:

$$\phi_u = (-a\sin u, a\cos u, 0), \phi_v = (0,0,1)$$

המכפלה הוקטורית היא:

$$\phi_u\times\phi_v=\begin{vmatrix} i & j & k \\ -a\sin u & a\cos u & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix}=i\cdot a\cos u-j\cdot(-a\sin u)+k\cdot(0)=(a\cos u,a\sin u,0)$$

ולכן אלמנט השטח הוא:

$$\|\phi_u\times\phi_v\|=\sqrt{a^2\cos^2u+a^2\sin^2u+0^2}=a$$

הפונקציה שלנו היא: $f(x,y,z)=\frac{1}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}$, ולכן: $f(\phi(u,v))=\frac{1}{\sqrt{a^2+v^2}}$. אם כן, האינטגרל שלנו הוא:

$$\iint\limits_S\frac{1}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}dS=\iint\limits_D\frac{1}{\sqrt{a^2+v^2}}\cdot adudv$$

התחום D שלנו הוא $0\le u\le 2\pi, 0\le v\le H$. לכן:

$$\iint\limits_D=a\int\limits_0^{2\pi}\int\limits_0^{H}\frac{1}{\sqrt{a^2+v^2}}dudv=2\pi a\cdot(\ln(v+\sqrt{a^2+v^2})|_{v=0}^{H}=2\pi a\ln(\frac{H+\sqrt{a^2+H^2}}{a})$$

וזהו האינטגרל שלנו.

4. פרמטריזציה של המשטח כבר נתונה.

וקטורי הנגזרות הם:

$$\phi_u=(\cos v,\sin v,0),\phi_v=(-u\sin v,u\cos v,1)$$

המכפלה הוקטורית היא:

$$\phi_u\times\phi_v=\begin{vmatrix} i & j & k \\ \cos v & \sin v & 0 \\ -u\sin v & u\cos v & 1 \end{vmatrix}=i\cdot\sin v-j\cdot\cos v+k\cdot(u\cos^2v+u\sin^2v)=(\sin v,-\cos v,u)$$

ולכן אלמנט השטח הוא:

$$\|\phi_u\times\phi_v\|=\sqrt{\sin^2v+\cos^2v+u^2}=\sqrt{1+u^2}$$

הפונקציה שלנו היא $f(x,y,z)=\sqrt{x^2+y^2+1}$, ולכן $f(\phi(u,v))=\sqrt{1+u^2}$. אם כן, האינטגרל שלנו הוא:

$$\iint\limits_S \sqrt{x^2+y^2+1}dS = \iint\limits_D \sqrt{1+u^2}\cdot\sqrt{1+u^2}dudv$$

התחום D שלנו הוא $0\le u\le 2, 0\le v\le \pi$. לכן:

$$\iint\limits_D (1+u^2)dudv = \int\limits_0^2\int\limits_0^\pi (1+u^2)dvdu = \pi(u+\frac{u^3}{3})|_0^2 = \frac{14\pi}{3}$$