פתרון לתרגיל 10

9 בפברואר 2017

שאלה 1

פתרון בחוברת של אלעד בעמוד 151

שאלה 2

חוברת של אלעד , עמוד 156

שאלה 3

חוברת של אלעד, עמוד 158

שאלה 3

נרצה למצוא את המינימום של פונקציית המרחק מנקודה $(0,0,0)$: $f(x,y,z) = x^2+y^2+z^2$ תחת שני אילוצים:

$$g_1(x,y,z) = x^2+y^2-1$$

$$g_2(x,y,z) = z-x-y$$

$$\nabla f = (2x,2y,2z)$$

$$\nabla g_1 = (2x,2y,0)$$

$$\nabla g_2 = (-1,-1,1)$$

נקבל את המערכת המשוואות הבאה:

$$2x = \lambda_1 \cdot 2x - \lambda_2$$

$$2y = \lambda_1 \cdot 2y - \lambda_2$$

$$2z = \lambda_2$$

$$x^2+y^2-1=0$$

$$z-x-y=0$$

נחסיר ממשוואה ראשונה את השנייה ונקבל:

$\lambda_1 = 1$ או $x = y$ $\Leftarrow (x-y)(1-\lambda_1) = 0$.

מקרה ראשון: $x = y$

אזי $y = x = \pm\frac{\sqrt{2}}{2}$ ולכן $z = \pm\sqrt{2}$

ולכן נקודות קיצון הן: $\left(\pm\frac{\sqrt{2}}{2}, \pm\frac{\sqrt{2}}{2}, \sqrt{2}\right)$

מקרה שני: $\lambda_1 = 1$

אזי משתי המשוואות הראשונות נקבל ש-$\lambda_2 = 0$ ולכן $z = 0$ ולכן $x = -y$ ולכן

$x = \pm\frac{\sqrt{2}}{2}$, $y = \mp\frac{\sqrt{2}}{2}$.

ולכן נקודות שחשודות לקיצון הן: $\left(\pm\frac{\sqrt{2}}{2}, \mp\frac{\sqrt{2}}{2}, 0\right)$.

נציב כל אחת מהנקודות המצאנו בשני המקרים בפונקציה f ונשווה בין הערכים שלה בכל אחת מהן, לבסוף נקבל:

$\left(\pm\frac{\sqrt{2}}{2}, \pm\frac{\sqrt{2}}{2}, \sqrt{2}\right)$ הן נקודות מקסימום

$\left(\pm\frac{\sqrt{2}}{2}, \mp\frac{\sqrt{2}}{2}, 0\right)$ הן נקודות מינימום.

שאלה 5

נמצא את הגרדיאנט של f, g, h ונקבל

$$\nabla f = (y, x+z, y)$$

$$\nabla g = (0, 2y, 2z)$$

$$\nabla h = (2x, 2y, 0)$$

ונקבל לבסוף את המערכת משוואות הבאה:

$$y = \lambda_2 \cdot 2x$$

$$x + z = \lambda_1 \cdot 2y + \lambda_2 \cdot 2y$$

$$y = \lambda_1 \cdot 2z$$

$$y^2 + z^2 - 4 = 0$$

$$x^2 + y^2 - 1 = 0$$

מהמשוואה הראשונה והשלישית נקבל:

$$\frac{y(\lambda_1+\lambda_2)}{2\lambda_1\lambda_2} = (\lambda_1 + \lambda_2) \cdot 2y$$

לאחר העברת אגפים נקבל:

$$y(\lambda_1 + \lambda_2)(\lambda_1\lambda_2 - 1) = 0$$

מה שגורר ש: $y=0$ או $\lambda_1=-\lambda_2$ או $\lambda_1\cdot\lambda_2=1$.

מקרה ראשון: $y=0$:

אזי $z=\pm2$ ולכן $x=\pm1$ ולכן יש 4 נקודות: $(\pm1,0,2)$, $(\pm1,0,-2)$

מקרה שני: $\lambda_1=-\lambda_2$:

אז נקבל $z=-\frac{y}{2\lambda_1}$, $x=\frac{y}{2\lambda_1}$ ולכן $x=-y$, וממשוואות האילוץ נקבל :

$x=\pm\frac{\sqrt{2}}{2}$, $y=\mp\frac{\sqrt{2}}{2}$ ולכן $z=\pm\sqrt{\frac{7}{2}}$.

הס"כ נקודות חשודות לקיצון במקרה הזה הן: $\left(\frac{\sqrt{2}}{2},-\frac{\sqrt{2}}{2},\sqrt{\frac{7}{2}}\right)$, $\left(\frac{\sqrt{2}}{2},-\frac{\sqrt{2}}{2},-\sqrt{\frac{7}{2}}\right)$, $\left(-\frac{\sqrt{2}}{2},\frac{\sqrt{2}}{2},\sqrt{\frac{7}{2}}\right)$, $\left(-\frac{\sqrt{2}}{2},\frac{\sqrt{2}}{2},-\sqrt{\frac{7}{2}}\right)$.

מקרה שלישי: $\lambda_1\cdot\lambda_2=1$

זה גורר ש- $\lambda_2=\frac{1}{\lambda_1}$ ולכן $x=\frac{y}{2\lambda_2}$ ולכן $y=2\lambda_2 x$, סה"כ נקבל $z=\lambda_1\cdot\lambda_2 x$ אבל $\lambda_1\cdot\lambda_2=1$ ולכן $z=x$.

ממשוואות האילוץ נקבל : $x=\pm\sqrt{2}$, $y^2+1=0$ ולמשוואה הזו אין פתרון ממשי, ולכן אין נקודות קיצון במקרה הזה.

נציב את כל הנקודות שמצאנו בפונקציה f ונשווה בין הערכים שלה בכל אחת מהנקודות האלה,

לבסוף נקבל ש- $\left(-\frac{\sqrt{2}}{2},\frac{\sqrt{2}}{2},\sqrt{\frac{7}{2}}\right)$, $\left(\frac{\sqrt{2}}{2},-\frac{\sqrt{2}}{2},-\sqrt{\frac{7}{2}}\right)$ הן נקודת מקסימום.
$\left(-\frac{\sqrt{2}}{2},\frac{\sqrt{2}}{2},-\sqrt{\frac{7}{2}}\right)$, $\left(\frac{\sqrt{2}}{2},-\frac{\sqrt{2}}{2},\sqrt{\frac{7}{2}}\right)$.

שאלה 6

דוגמה נגדית: $\mathbb{Q}$ היא קבוצה זניחה, אבל $\overline{\mathbb{Q}}=\mathbb{R}$ לא קבוצה זניחה.

נניח בשלילה ש-$\mathbb{R}$היא זניחה, אזי לכל $\epsilon>0$, קיים אוסף סופי או בן מנייה של קטעים Q_j כך ש- $\mathbb{R}\subseteq\bigcup Q_j$, ולכן:

$v\left(\mathbb{R}^n\right)\leq\sum v\left(Q_j\right)<\epsilon$ ובפרט זה נכון עבור $\epsilon=1$. ויהי $Q^*\subseteq\mathbb{R}$ קטע מאורך 10, כלומר $v\left(Q^*\right)=10$.

ברור ש-$1<v\left(Q^*\right)<v\left(\mathbb{R}\right)$ כי $Q^*\subset\mathbb{R}$, ולכן קיבלנו: $v\left(\mathbb{R}\right)<v\left(\mathbb{R}\right)$, סתירה.