מבוא לאלגברה לינארית - תרגיל 4

תרגיל 1. עבור כל אחד מהסעיפים הבאים קבע האם הנפרש שווה לקבוצה שאליו משווים. אם כן, בטא איבר כללי של הקבוצה באמצעות הוקטורים הנתונים.

.1

$$\mathbb{R}^3 \stackrel{?}{=} span\left\{\begin{pmatrix}2 & 0 & 4\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0 & 1 & 0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}6 & 5 & 12\end{pmatrix}\right\}$$

פתרון.

הנפרש לא שווה ל-$\mathbb{R}^3$.

$(0,0,1) \notin span\left\{(2,0,4),(0,1,0),(6,5,12)\right\}$, נניח בשלילה שכן, אז קיימים $\alpha,\beta,\gamma \in \mathbb{R}$ כך ש-

$$(0,0,1) = \alpha(2,0,4) + \beta(0,1,0) + \gamma(6,5,12)$$

מכאן צריך להתקיים

$$\begin{cases} 0 = 2\alpha + 6\gamma \\ 1 = 4\alpha + 12\gamma \end{cases}$$

והדבר לא אפשרי.

.2

$$\mathbb{R}^2 \stackrel{?}{=} span\left\{\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}2\\4\end{pmatrix}\right\}$$

פתרון.

הנפרש שווה ל-$\mathbb{R}^2$.

יהי וקטור כללי $\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2$ נראה שקיימים סקלרים α,β כך ש-

$$\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix} = \alpha\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix} + \beta\begin{pmatrix}2\\4\end{pmatrix}$$
$$\Downarrow$$
$$\begin{cases} x = 2\beta \\ y = \alpha + 4\beta \end{cases}$$
$$\Downarrow$$
$$\begin{cases} \beta = \frac{x}{2} \\ \alpha = y - 2x \end{cases}$$

לכלומר לכל וקטור $\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2$ ניתן למצוא סקלרים שיתנו את הצירוף לינארי הדרוש למשל כדי לקבל את הווקטור $\begin{pmatrix}10\\4\end{pmatrix}$ניקח

$$\begin{cases} \beta = \frac{10}{2} = 5 \\ \alpha = 4 - 2\cdot 10 = -16 \end{cases}$$

ואכן מתקיים

$$-16\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}+5\begin{pmatrix}2\\4\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}10\\4\end{pmatrix}$$

.3

$$\mathbb{R}_3[x]\stackrel{?}{=}span\left\{1,x+x^2,4x^3+x^2,2x\right\}$$

כאשר

$$\mathbb{R}_3[x]=\left\{a_0+a_1x+a_2x^2+a_3x^3|a_0,a_1,a_2,a_3\in\mathbb{R}\right\}$$

מרחב כל הפולינומים עד דרגה 3

פתרון.

הנפרש שווה ל-$\mathbb{R}_3[x]$.

$$a_0+a_1x+a_2x^2+a_3x^3=a_0\cdot 1+\left(a_2-\frac{1}{4}a_3\right)\cdot(x+x^2)+\frac{1}{4}a_3\cdot(4x^3+x^2)+\left(\frac{1}{2}a_1-\frac{1}{2}a_3+\frac{1}{8}a_3\right)\cdot(2x)$$

.4

$$\mathbb{R}^{2\times 2}\stackrel{?}{=}span\left\{\begin{pmatrix}1&2\\1&2\end{pmatrix},\begin{pmatrix}1&-1\\-1&1\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0&1\\1&0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}5&3\\3&5\end{pmatrix}\right\}$$

כאשר

$$\mathbb{R}^{2\times 2}=\left\{\begin{pmatrix}a_{11}&a_{12}\\a_{21}&a_{22}\end{pmatrix}|a_{11},a_{12},a_{21},a_{22}\in\mathbb{R}\right\}$$

מרחב כל המטריצות מגודל 2×2

פתרון.

הנפרש לא שווה ל-$\mathbb{R}^{2\times 2}$.

נניח בשלילה, $\begin{pmatrix}0&0\\0&1\end{pmatrix}\notin span\left\{\begin{pmatrix}1&2\\1&2\end{pmatrix},\begin{pmatrix}1&-1\\-1&1\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0&1\\1&0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}5&3\\3&5\end{pmatrix}\right\}$

שכן, אז קיימים $\alpha,\beta,\gamma,\delta\in\mathbb{R}$ כך ש-

$$\begin{pmatrix}0&0\\0&1\end{pmatrix}=\alpha\begin{pmatrix}1&2\\1&2\end{pmatrix}+\beta\begin{pmatrix}1&-1\\-1&1\end{pmatrix}+\gamma\begin{pmatrix}0&1\\1&0\end{pmatrix}+\delta\begin{pmatrix}5&3\\3&5\end{pmatrix}$$

מכאן צריך להתקיים

$$\begin{cases}0=\alpha+\beta+5\delta\\0=2\alpha-\beta+\gamma+3\delta\\0=\alpha-\beta+\gamma+3\delta\\1=2\alpha+\beta+5\delta\end{cases}$$

והדבר לא אפשרי (מוזמנים לפתור ולבדוק).

תרגיל 2. מצא k כך שהקבוצה

$$\left\{\begin{pmatrix}k\\1\\1\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0\\1\\k\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0\\1\\1\end{pmatrix}\right\}$$

תלוייה לינארית ?

פתרון.

נחפש k כך שלמערכת $\alpha\begin{pmatrix}k\\1\\1\end{pmatrix}+\beta\begin{pmatrix}0\\1\\k\end{pmatrix}+\gamma\begin{pmatrix}0\\1\\1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\0\\0\end{pmatrix}$ יהיה פתרון לא טריוואלי

$$\left(\begin{array}{ccc|c} k & 0 & 0 & 0\\ 1 & 1 & 1 & 0\\ 1 & k & 1 & 0\end{array}\right) \rightarrow$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 0\\ k & 0 & 0 & 0\\ 1 & k & 1 & 0\end{array}\right) \rightarrow$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 0\\ 0 & -k & -k & 0\\ 0 & k-1 & 0 & 0\end{array}\right) \rightarrow$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 0\\ 0 & 1 & 1 & 0\\ 0 & k-1 & 0 & 0\end{array}\right) \rightarrow$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 0\\ 0 & 1 & 1 & 0\\ 0 & 0 & -k+1 & 0\end{array}\right)$$

כאשר $k=1$ יש פתרון לא טריוואלי. במהלך הדירוג חילקנו ב-k לכן יש לבדוק מה קורה למטריצה עבור $k=0$ בשלב לפני החלקה ונקבל

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0\\ 0 & -1 & 0 & 0\end{array}\right)$$

וגם כאן יש פתרון לא טריוואלי. לסיכום, עבור $k=0,1$ הווקטורים תלווים לינארית.

תרגיל 3. מצא k כך שהקבוצה

$$\left\{\begin{pmatrix}1\\k\\1\\-1\end{pmatrix},\begin{pmatrix}2\\0\\1\\k\end{pmatrix},\begin{pmatrix}1\\3\\2\\1\end{pmatrix}\right\}$$

תלויה לינארית ?

פתרון.

נשים את הווקטורים כשורות במטריצה ונדרג.

$$\begin{pmatrix} 1 & k & 1 & -1 \\ 2 & 0 & 1 & k \\ 1 & 3 & 2 & 1 \end{pmatrix} \rightarrow$$

$$\begin{pmatrix} 1 & k & 1 & -1 \\ 0 & -2k & -1 & k+2 \\ 0 & 3-k & 1 & 2 \end{pmatrix} \rightarrow$$

$$\begin{pmatrix} 1 & k & 1 & -1 \\ 0 & -2k & -1 & k+2 \\ 0 & 0 & 3k-3 & -k^2+5k+6 \end{pmatrix}$$

כדי שהווקטורים יהיו תלויים צריך שהשורה השלישית תהיה שווה ל-0 לכן

$$3k-3=0 \quad -k^2+5k+6=0$$
$$\Downarrow$$
$$k=\phi$$

כלומר לכל k הווקוטרים בת"ל.

תרגיל 4. יהיו

$$v=\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}, w=\begin{pmatrix} c \\ d \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2$$

הוכיחו שאם v_1, v_2 תלויים לינארית אז

$$ad-bc=0$$

פתרון.
נתון ש-v, w כלומר קיימים α, βלא טריוואלים (לפחות אחד שונה מ-0) כך ש-

$$\alpha\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}+\beta\begin{pmatrix} c \\ d \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

נפתור את המערכת

$$\left(\begin{array}{cc|c} a & c & 0 \\ b & d & 0 \end{array}\right) \rightarrow$$

$$\left(\begin{array}{cc|c} a & c & 0 \\ 0 & da-bc & 0 \end{array}\right)$$

כדי שיהיה פתרון לא טריוואלי חייב לתקיים $da-bc=0$

תרגיל 5. הוכחו: יהיו u, v בת"ל ו-$w \in Sapn\{u, v\}$ אז $\{u, v, w\}$ ת"ל

פתרון. נהיות ו-

$$w \in Sapn\{u, v\}$$

קיימים α, β כך ש-

$$w=\alpha u+\beta v$$

לכן

$$0=\alpha u+\beta v-w$$

כלומר קיים צל לא טריוואלי שיתן לנו את ווקטור ה-0 ולכן $\{u, v, w\}$ת"ל.

בהצלחה!!