הרצאה 15

$$Q(x) = \sum_{i,j=1}^{n} a_{ij} x_i x_j$$
$$a_{ij} = a_{ji}$$
$$A = (a_{ij})_{i,j=1}^{n}$$
$$A = A^T$$

$$Q(x) = \langle Ax, x\rangle$$
$$A > 0 \Leftrightarrow Q > 0$$
$$A \geq 0 \Leftrightarrow Q \geq 0$$
$$A < 0 \Leftrightarrow Q < 0$$
$$A \leq 0 \Leftrightarrow Q \leq 0$$

מחקר לסימן של מטריצה או תבנית ריבועית

מטריצה אורטוגונלית

$$UU^T = U^T U = I$$
$$U^T = U^{-1}$$
$$\langle Ux, Uy\rangle = \langle x, U^T U y\rangle = \langle x, y\rangle$$
$$||Ux||^2 = \langle Ux, Ux\rangle = \langle x, x\rangle = ||x||^2$$
$$||Ux|| = ||x||$$

משפט

לכל מטריצה $A = A^T$ קיימת מטריצה אורטוגונלית U כך ש:

$$UAU^{-1} = \Lambda = \begin{pmatrix} \lambda_1\ 0\ 0 \ldots 0 \\ 0\ \lambda_2\ 0 \ldots 0 \\ \ldots \ldots \ldots \ldots .. \\ 0\ 0 \ldots \ldots \lambda_n \end{pmatrix}$$

λ_j ע"ע, $e_j = (0,0,\ldots,1,\ldots 0)$

$$UAU^{-1}e_j = \Lambda e_j = \lambda_j e_j \Rightarrow AU^{-1}e_j = \lambda_j (U^{-1}e_j)$$

משפט

תהי $Q(x) = \langle Ax, x\rangle$ $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ ע"ע של A, אזי:

$$\lambda_1, \ldots, \lambda_n > 0 \Leftrightarrow Q > 0$$
$$\lambda_1, \ldots, \lambda_n \geq 0 \Leftrightarrow Q \geq 0$$
$$\lambda_1, \ldots, \lambda_n < 0 \Leftrightarrow Q < 0$$
$$\lambda_1, \ldots, \lambda_n \leq 0 \Leftrightarrow Q \leq 0$$

הוכחה

$$\exists U \in O(n) : UAU^{-1} = \Lambda = \begin{pmatrix} \lambda_1\ 0\ 0 \ldots 0 \\ 0\ \lambda_2\ 0 \ldots 0 \\ \ldots \ldots \ldots \ldots .. \\ 0\ 0 \ldots \ldots \lambda_n \end{pmatrix}$$

$x \in \mathbb{R}^r : Q(x) = \langle Ax, x\rangle = \langle U^{-1}\Lambda Ux, x\rangle = \langle \Lambda Ux, Ux\rangle$
$\mathrm{U}x \coloneqq x'$
$Q(x) = \langle \Lambda x', x'\rangle = \lambda_1(x_1')^2 + \cdots + \lambda_n(x_n')^2$

$$\lambda_1, \dots, \lambda_n > 0 \Leftrightarrow \langle \Lambda x', x'\rangle > 0 \Leftrightarrow Q(x) > 0$$
$$\lambda_1, \dots, \lambda_n \geq 0 \Leftrightarrow \langle \Lambda x', x'\rangle \geq 0 \Leftrightarrow Q(x) \geq 0$$
$$\lambda_1, \dots, \lambda_n < 0 \Leftrightarrow \langle \Lambda x', x'\rangle < 0 \Leftrightarrow Q(x) < 0$$
$$\lambda_1, \dots, \lambda_n \leq 0 \Leftrightarrow \langle \Lambda x', x'\rangle \leq 0 \Leftrightarrow Q(x) \leq 0$$

$\det A < 0 \Leftrightarrow$ A לא שומרת סימן

קריטריון של *Silvester*

$$A = \left(a_{ij}\right)_{i,j=1}^{n}$$
$$\Delta_k = \det\left(a_{ij}\right)_{i,j=1}^{k}$$

אם $\Delta_1, \dots, \Delta_n > 0$ אז $A > 0$

אם $\forall k = 1, \dots, n : (-1)^k \Delta_k > 0$ אזי $A < 0$ $\quad (\Delta_1 < 0, \Delta_2 > 0 \dots)$

דיפרנציאל שני

$$d^2f_a(h) = Q(h) = \sum_{i,j=1}^{n} \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}(a) h_i h_j$$
$$f \in C^2(U) \;;\quad U \subset\circ \mathbb{R}^n \quad ; \quad a \in U$$

משפט

אם תבנית ריבועית $Q > 0$ אז קיים $C > 0$ כך שלכל $x \in \mathbb{R}^n$ מתקיים $Q(x) \geq C||x||^2$

הוכחה

1. Q – רציפה לפי משפט Weierstrass
2. $\min_{||x||=1} Q(x) = Q(x_0), ||x_0|| = 1$

נסמן $C = Q(x_0) > 0$

ניקח $x \in \mathbb{R}^n$, אם $x = 0$ אזי $Q(0) = 0$

אם $x \neq 0$ אזי $x' := \frac{x}{||x||}$ כאשר $||x'|| = 1$ ולכן $Q(x') \geq Q(x_0) = C$

$\frac{Q(x)}{||x||^2} = Q\left(\frac{x}{||x||}\right) \geq C$ ולכן $Q(x) \geq C||x||^2$

עוד הוכחה

$UAU^{-1} = \Lambda$

$$Q(x) = \langle Ax, x\rangle = \langle U^{-1}\Lambda Ux, x\rangle = \langle \Lambda Ux, Ux\rangle = \{x' = Ux\} = \langle \Lambda x', x'\rangle = \lambda_1(x_1')^2 + \cdots + \lambda_n(x_n')^2$$
$$\geq \lambda_{min}||x'||^2 = \lambda_{min}||x||^2$$
$$Q > 0 \Rightarrow C := \lambda_{min} > 0$$
$$Q(x) \geq C||x||^2$$

משפט

תהי פונ' $f: U \to \mathbb{R}$ $\quad U \subset\circ \mathbb{R}^n \quad f \in C^2(U)$

תהי $a \in U$ נקודה קריטית, כלומר $\nabla f(a) = 0$

1. אם $d^2f_a > 0$ אז a נקודת מינימום מקומי ממש.
2. אם $d^2f_a < 0$ אז a נקודת מקסימום מקומי ממש.
3. אם d^2f_a לא מוגדרת סימן אז a לא נקודת קיצון.

הוכחה

1. $Q := d^2f_a > 0$

לפי המשפט הקודם קיים $C > 0$ כך ש $\forall h \in \mathbb{R}^n: Q(h) \geq C||h||^2$

נוסחת טיילור מסדר 2 סביב נקודה a:

$$f(x) = f(a) + df_a(x-a) + \frac{1}{2}d^2f_a(x-a) + \epsilon(x-a)||x-a||^2$$
$$df_a(x-a) = \langle \nabla f(a), x-a\rangle = 0$$
$$f(x) - f(a) = \frac{1}{2}d^2f_a(x-a) + \epsilon(x-a)||x-a||^2 = \frac{1}{2}Q(x-a) + \epsilon(x-a)||x-a||^2$$
$$\geq \frac{1}{2}C||x-a||^2 + \epsilon(x-a)||x-a||^2$$
$$f(x) - f(a) \geq ||x-a||^2\left(\frac{1}{2}C + \epsilon(x-a)\right)$$

$$\exists\delta>0\ :\ \left\|x-a\right\|<\delta\Rightarrow|\epsilon(x-a)|<\frac{1}{4}C$$

לכל x בתחום מתקיים:

$$\left\|x-a\right\|<\delta\Rightarrow f(x)-f(a)\geq\frac{1}{4}C\left\|x-a\right\|\underset{x\neq a}{>}0$$

$$\forall x\in U\cap B_\delta(a),x\neq 0: f(x)-f(a)>0$$

ולכן a נק' מינימום ממש.

2. נחליף f ל $-f$.
3. נניח כי Q לא שומרת סימן.

$$\exists h_+\in\mathbb{R}^n: Q(h_+)>0$$
$$\exists h_-\in\mathbb{R}^n: Q(h_-)<0$$

$$f(a+th_\pm)=f(a)+df_a(th_\pm)+\frac{1}{2}d^2f_a(th_\pm)+\epsilon(th_\pm)\left\|th_\pm\right\|^2$$

$$f(a+th_\pm)-f(a)=\frac{1}{2}Q(th_\pm)+\epsilon(th_\pm)\left\|th_\pm\right\|^2=\frac{1}{2}t^2Q(h_\pm)+|t|^2\epsilon(th_\pm)\left\|h\right\|^2=$$
$$=t^2\left(\frac{1}{2}Q(h_\pm)+\epsilon(th_\pm)\left\|h_\pm\right\|^2\right)$$

a. $Q(h_+)>0$

$$\exists\delta>0:|t|<\delta\Rightarrow\left|\epsilon(th_+)\left\|h_+\right\|^2\right|<\frac{1}{4}Q(h_+)$$

אז אם $|t|<\delta$ אזי $f(a+th_+)-f(a)\underset{t\neq 0}{>}0$

b. $Q(h_-)<0$

$$\exists\delta'>0:\left|\epsilon(th_-)\left\|h_-\right\|^2\right|<\frac{1}{4}|Q(h_-)|\Rightarrow\frac{1}{2}Q(h_-)+\epsilon(th_-)\left\|h\right\|^2<0$$
$$f(a+th_-)-f(a)<0$$

ולכן a לא נקודת קיצון.

משמעות גאומטרית

$$f(x)=f(a)+\sum\lambda_j\left(x_j-a_j\right)^2+o\left(\left\|x-a\right\|^2\right)$$

$\lambda_j>0$ אז עבור a, x_j היא נקודת מינימום.

$\lambda_j<0$ אז עבור a, x_j היא נקודת מקסימום.

דוגמא

$f(x,y)=f(a)+\lambda x^2+\mu y^2+o(x^2+y^2);\quad \lambda*\mu>0$ יש קיצון.

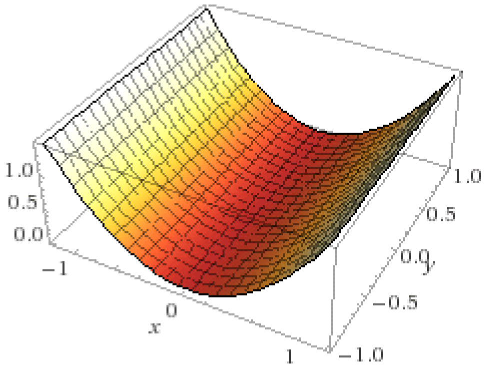
$\lambda*\mu<0$ אז אין קיצון (אוכף).

דוגמא

$\lambda_1, \dots, \lambda_n$

$\lambda_1, \dots, \lambda_m > 0 \quad \lambda_{m+1}, \dots, \lambda_n = 0$ אי אפשר להחליט

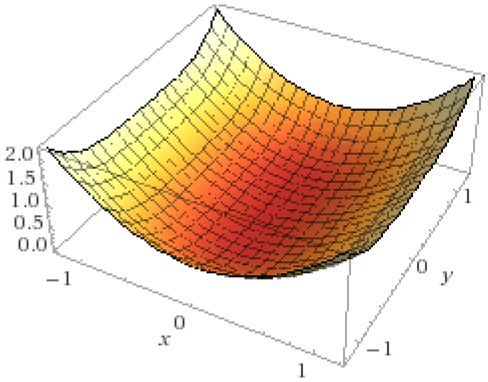
$f(x,y) = x^2$



$\lambda_1 = 2, \lambda_2 = 0$

$a = (0,0)$ נקודת מינימום לא ממש.

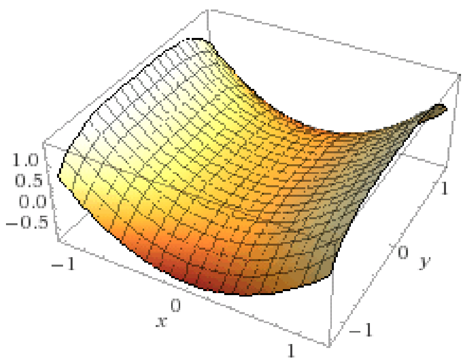
$f(x,y) = x^2 + \epsilon y^4$



$(0,0)$ מינימום ממש.

$f(x,y) = x^2 - \epsilon y^4$

$f(x,0) > 0 \quad x \neq 0$
$f(0,y) < 0 \quad y \neq 0$



$(0,0)$ אוכף.

מחקר לקיצון

$$f(x_1, \dots, x_n)$$

1) נקודות קריטיות

$$\begin{cases} \frac{\partial f}{\partial x_1}(x) = 0 \\ \vdots \\ \frac{\partial f}{\partial x_n}(x) = 0 \end{cases}$$

a נקודה קריטית.

$$n = 2$$
$$f'_x(a) = f'_y(a) = 0$$
$$H = \begin{pmatrix} f'_{xx} & f'_{xy} \\ f_{yx} & f'_{yy} \end{pmatrix}$$

$\det H < 0 \Rightarrow$ נקודת אוכף a

דוגמא

$$f(x, y) = x^3 + y^3 - 3xy$$

$$\begin{cases} f'_x = 3x^2 - 3y = 0 \\ f'_y = 3y^2 - 3x = 0 \end{cases}$$

$$y^4 - y = 0 \Rightarrow (x, y) = (0,0), (1,1)$$

נקודות קריטיות: $a = (0,0), b = (1,1)$

$$H_f = \begin{pmatrix} 6x & -3 \\ -3 & 6y \end{pmatrix}$$

$$H_f(a) = \begin{pmatrix} 0 & -3 \\ -3 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \det H = -2 < 0$$

$(0,0)$ נקודת אוכף.

$$H_f(b) = \begin{pmatrix} 6 & -3 \\ -3 & 6 \end{pmatrix}$$
$$\Delta_1 = 6 > 0$$
$$\Delta_2 = 36 - 9 > 0$$

$d^2 f_b > 0$ ולכן b נקודת מינימום מקומי.