נכתב על ידי יהונתן רגב

רציפות פונקציות

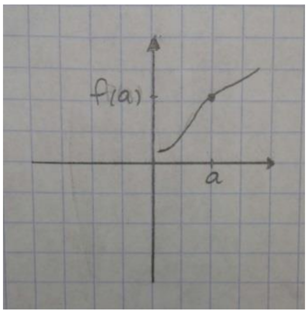
הגדרה

פונקציה $f(x)$ היא **רציפה** בנקודה a אם $\lim_{x\to a} f(x) = f(a)$.

בהגדרה, דורשים גם ש:

- a נקודת הצטברות של $dom(f)$.
- $f(a)$ מוגדר $\left(a \in dom(f)\right)$.

המחשה



דוגמה

1. $f(x) = c$, פונקציה קבועה.

רציפה בכל $a \in \mathbb{R}$.

$$\lim_{x\to a} f(x) = \lim_{x\to a} c = c = f(a)$$

2. $f(x) = x^2$

רציפה בכל $a \in \mathbb{R}$:

$$\lim_{x\to a} f(x) = \lim_{x\to a} x^2 = a \cdot a = a^2 = f(a)$$

3. $f(x) = [x]$

אינה רציפה באף $a \in \mathbb{Z}$:

$$\lim_{x\to a^-} f(x) = \lim_{x\to a^-} [x] = a - 1 \neq a = \lim_{x\to a^+} [x] = \lim_{x\to a^+} f(x)$$

לכן, $\lim_{x\to a} f(x)$ לא קיים, והפונקציה אינה רציפה ב - $a \in \mathbb{Z}$.

עבור $a \notin \mathbb{Z}$, הפונקציה רציפה. (**תרגיל:** בדוק!).

נכתב על ידי יהונתן רגב

4. פונקציית דיריכלה: לפונקציה אין גבול באף נקודה, ובפרט אינה רציפה באף נקודה.
5. פונקציית הפופקורן: לפונקציה קיים גבול (=0) בכל נקודה:

$$f(x)\begin{cases} 1, x \in \mathbb{Q} \\ 0, x \notin \mathbb{Q} \\ \frac{1}{n}, x = \frac{m}{n}\ (n > 0, \text{מצומצם}) \end{cases}$$

לכן, הפונקציה רציפה בכל נקודה $a \notin \mathbb{Q}$.

עבור $a \in \mathbb{Q}$, כולל $a = 0$: $\lim\limits_{x\to a} f(x) = 0 < f(a)$, ולכן f אינה רציפה ב - a.

הערה

כל אחד מהתנאים הבאים שקול לרציפות f בנקודה a:

1. לכל $0 < \epsilon$. קיים $0 < \delta$, כך ש: $|f(x) - f(a)| < \epsilon$ לכל x (בתחום) כך ש - $|x - a| < \delta$ (לא צריך להחריג את $x = a$).
2. $\lim\limits_{h\to 0} f(a + h) = f(a)$.
3. לכל סידרה $a_n \to a$, מתקיים: $f(a_n) \to f(a)$. (לא נדרש ש - $a_n \neq a$ לכל n).

הוכחה

נראה כי $\lim\limits_{x\to a} f(x) = f(a) \Rightarrow "(3)"$.

תהי $a_n \to a$. נסמן $I = \{n: a_n = a\}$ ו - $J = \{n: a_n \neq a\}$.

<u>מקרה 1</u>: J סופית, כלומר לבסוף $a_n = a$.

אז לבסוף $f(a_n) = f(a)$. כיוון שגבול סידרה לא מושפע ממספר סופי של איברים בסדרה,

$$\lim_{n\to\infty} f(a_n) = \overbrace{\lim_{n\to\infty} f(a)}^{\text{סידרה קבועה}} = f(a).$$

<u>מקרה 2</u>: I סופית, כלומר לבסוף $a_n \neq a$.

תהי b_n הסדרה המתקבלת מ - a_n ע"י הסרת האיברים a_n כך ש - $n \notin I$.

$a_n \to a \Leftarrow b_n \to a \neq a$, ומהנתון $\lim\limits_{x\to a} f(x) = f(a)$, מתקיים $f(b_n) \to f(a)$.

מכיוון ש $- I$ סופית, $f(a_n) \to f(a)$.

<u>מקרה 3</u>: I,J אינסופית.

תהי b_n תת הסדרה המורכבת מ - a_n כך ש - $n \in I$.

תהי c_n תת הסדרה המורכבת מ - a_n כך ש - $n \in J$.

$b_n = a$ לכל n, לכן: $f(b_n) = f(a) \to f(a)$.

$a \neq c_n \to a$ (תת סדרה של $a_n \to a$), לכן: $f(c_n) \to f(a).$.

$I \cup J = \mathbb{N}$ לכן: $f(a_n) \to f(a)$.

■

הערה

את ההוכחה האחרונה ניתן להוכיח גם ישירות עפ"י ההגדרה, עם δ, ϵ.

למה

יהיו f,g רציפות בנקודה a. (כך ש - a נקודת הצטברות של $dom(f) \cap dom(g)$).

הפונקציות $f(x) \pm g(x), f(x) \cdot g(x)$ רציפות בנקודה a, ואם $g(a) \neq 0$, אז גם הפונקציה: $\frac{f(x)}{g(x)}$ רציפה בנקודה a.

הוכחה

מיידי מחשבון גבולות.

למשל: אם $\lim_{x\to a} g(x) = d \wedge \lim_{x\to a} f(x) = c$, אז: $\lim_{x\to a}\big(f(x) + g(x)\big) = c + d$. ■

מסקנות

כל פולינום הוא פונקציה רציפה בכל נקודה (רעיון: כל פולינום מתקבל מהפונקציות הרציפות x וקבועות, ע"י כפל וחיבור).

כל פונקציה רציונאלית (מנה של פולינומים, $\frac{f(x)}{g(x)}$) היא רציפה בכל נקודה a בה $g(a) \neq 0$.

דוגמה

$sin(x)$ רציפה בכל נקודה a.

$$\lim_{h\to 0} sin(a+h) = \lim_{h\to 0}(sin(a)\cdot\overbrace{cos(h)}^{\to 1} + cos(a)\cdot\overbrace{sin(h)}^{\to 0}) \to sin(a)$$

למה

אם $f(x)$ רציפה בנקודה a ו - $g(x)$ רציפה בנקודה $b=f(a)$. אז $g\big(f(x)\big)$ רציפה ב - a.

הוכחה

נשתמש בניסוח השקול (1) לרציפות הפונקציה $g\big(f(x)\big)$.

יהי נתון $\epsilon > 0$. ניקח $\delta > 0$ כך ש - $|g(y)-g(b)| < \epsilon$ לכל $|y-b| < \delta$ (מרציפות g ב - b).

מרציפות f ב - a: קיים $\delta_2 > 0$ כך ש - $\left|f(x)-\overbrace{f(a)}^{b}\right| < \delta$ לכל $|x-a| < \delta_2$.

אז: לכל x המקיים $|x-a| < \delta_2$, מתקיים: $\left|\overbrace{f(x)}^{y}-b\right| < \delta$, ולכן:

$\left|g\big(f(x)\big)-g\big(f(a)\big)\right| = |g(y)-g(b)| < \epsilon$.

■

דוגמה

$\cos(x) = \overbrace{sin}^{\text{רציפה}}\left(\overbrace{x+\frac{\pi}{2}}^{\text{רציפה}}\right)$ רציפה בכל נקודה.

$\frac{\sin(x)}{\cos(x)} = tg(x)$ רציפה בכל נקודה a שבה $\cos(a) \neq 0$ ($a \notin \left\{\frac{\pi}{2}+\pi\cdot k : k\in\mathbb{Z}\right\}$), כמנה של פונקציות רציפות בכל נקודה.

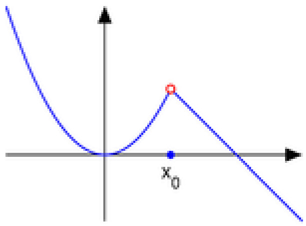
נכתב על ידי יהונתן רגב

סוגי אי רציפות אפשריים בנקודה a

- **סוג 0 – אי רציפות סליקה**

הגבול $\lim_{x\to a} f(x)$ קיים, אך $f(a)$ אינה מוגדרת או שהגבול שונה מ - $f(a)$ (ניתן "לסלק" אי רציפות זו ע"י הגדרה מחדש $f(a)=\lim_{x\to a} f(x)$. פורמלית, מתקבלת פונקציה שונה, אך מעט).

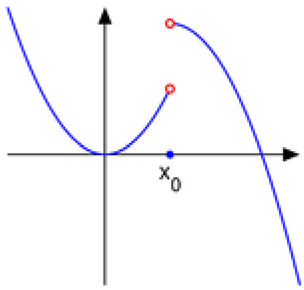
המחשה



- **סוג ראשון – אי רציפות קפיצה**

הגבול מימין ומשמאל קיימים אך שונים.

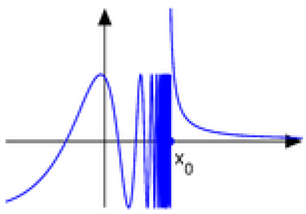
המחשה



- **סוג שני**

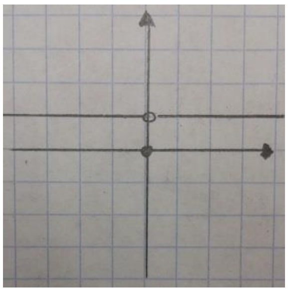
כל השאר. לפחות אחד מהגבולות החד צדיים לא קיים.

המחשה



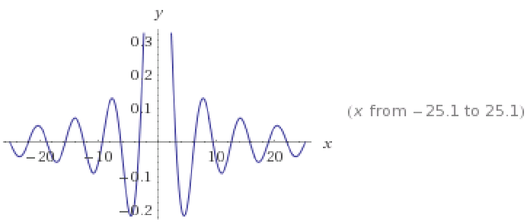
דוגמה

$$f(x)=\begin{cases}1\,,x\neq 0\\0\,,x=0\end{cases}$$



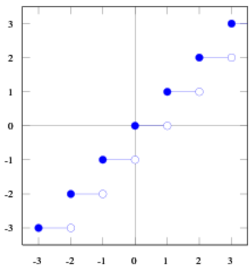
אי רציפות סליקה

$$f(x)=\frac{\sin(x)}{x}$$



לא מוגדרת ב - $a=0$, ולכן לא רציפה שם, אך הגבול קיים (=1), לכן, אי הרציפות סליקה.

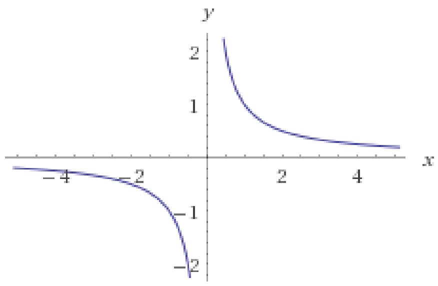
$$f(x)=[x]$$



אי רציפות מסוג קפיצה בכל נקודה $a\in\mathbb{Z}$.

נכתב על ידי יהונתן רגב

$$f(x) = \frac{1}{x}$$



בנקודה $a = 0$ הגבול $\lim_{x\to 0} f(x)$ לא קיים, לכן אי הרציפות היא מסוג שני.

$$f(x) = \frac{1}{|x|}$$

אינה רציפה ב – 0 מסוג שני, למרות ש - $\lim_{x\to 0} f(x) = \infty$, במובן הרחב.

$$f(x) = \begin{cases} 1, x \in \mathbb{R}\setminus\mathbb{Q} \\ 0, x \in \mathbb{Q} \end{cases}$$

הפונקציה אי רציפה מסוג שני בכל נקודה a (הגבולות החד צדדיים לא קיימים).

למה

תהי f פונקציה המוגדרת בסביבת הנקודה a. אם f רציפה בנקודה a ו - $0 < f(a)$, אז קיימת סביבה של a שבה $0 < f(x)$ (ובדומה עבור $f(a) < 0$).

הוכחה

ניקח $0 < \epsilon$ כך ש - $0 < f(a) - \epsilon$.

מהנתון, קיים $0 < \delta$ כך ש - $|f(x) - f(a)| < \epsilon$ לכל $|x - a| < \delta$.

כלומר, $f(x) \in \overbrace{(f(a) - \epsilon, f(a) + \epsilon)}^{0<f(a)}$, לכל $x \in (a - \delta, a + \delta)$.

(בבחירת δ, נקטין אותו אם צריך כך ש - $(a - \delta, a + \delta) \subseteq dom(f)$).

נכתב על ידי יהונתן רגב

הגדרה

***f* רציפה מימין** בנקודה a אם $\lim\limits_{x\to a^+} f(x) = f(a)$.

***f* רציפה משמאל** בנקודה a אם $\lim\limits_{x\to a^-} f(x) = f(a)$.

גם כאן קיימים ניסוחים ללא ניקוב, ובלשון הסדרות.

דוגמה

$[x]$ רציפה מימין בכל נקודה $a \in \mathbb{R}$, אך אינה רציפה משמאל בנקודות שלמות.

מסקנה

f רציפה בנקודה a $\Leftrightarrow$ f רציפה מימין ומשמאל בנקודה a.