

אלגברה מופשטת 1, תרגיל בית 1

מתרגלים: סולי וישקאוצין ואדם צ'פמן. להגשה ב16.11 או ב13.11 בהתאם לשיעור התרגיל.

(1) מצא a ו b המקיימים $\gcd(r, s) = ar + bs$, כאשר

$$a. \quad r = 13, s = 17$$

$$b. \quad r = 12, s = 16 \quad [\text{רמז: אלגוריתם אוקלידס}]$$

פיתרון:

$$1 = 13 - 3 \cdot 4 = 13 - 3 \cdot (17 - 13) = 4 \cdot 13 - 3 \cdot 17$$

כלומר בסעיף א התשובה היא $a = 4$ ו $b = -3$.

$$4 = 16 - 12$$

כלומר בסעיף ב התשובה היא $a = -1$ ו $b = 1$.

(2) הוכיחו כי כל חבורה מסדר (=מספר האיברים בה) 4 היא אבלית. [רמז:

העזרו בהנחת השלילה]

פיתרון:

תהי חבורה G לא אבלית. אזי קיים זוג איברים $a, b \in G$ כך ש $ab = c$,

$ba = d$ ו $c \neq d$. כעת, קיים איבר יחידה $e \in G$. לא ייתכן ש $a = e$ או

ש $b = e$ משום שאז a ו b היו מתחלפים. לא ייתכן ש $c = e$ או $d = e$ משום

שאז $b = a^{-1}$ ואז a ו b מתחלפים. כמו-כן, כל האיברים a, b, c, d שונים זה

מזה משום שאחרת קורה אחד מן המקרים שהוזכרו קודם. לכן החבורה G כוללת

לפחות חמישה איברים שונים, ולכן היא איננה מסדר 4.

(3) הראו כי אם במונויד מתקיים $aba = a$ וגם $ab^2a = e$ (כאשר e הוא

איבר היחידה) אזי $a = b^{-1}$ (כלומר $ab = ba = e$).

פיתרון:

נכפיל את היחס $aba = a$ ב b^2a מימין ונקבל $abab^2a = ab^2a$, ואם מפעילים את היחס השני אז מקבלים $ab = e$. באופן דומה אם מכפילים את

$aba = a$ ב ab^2 משמאל אז מקבלים $ba = e$.

(4) יהי מונויד בו כל איבר הוא הפיך משמאל (כלומר לכל b קיים a כך

$ab = e$). הוכח כי המונויד הוא חבורה.

פיתרון:

יהי איבר b במונויד. צריך להוכיח כי הוא הפיך. לפי הנתון הוא הפיך משמאל על-ידי איזשהו איבר a במונויד. כעת גם a נמצא במונויד ולכן הוא הפיך משמאל על-ידי איזשהו איבר c . הפיך מימין (על-ידי b) וגם הפיך משמאל, ולכן a הפיך, ולכן ההפכי משמאל שלו שווה להופכי מימין, כלומר $b = c$, ולכן b הוא ההפכי של a , משמע b הפיך.

(5) רשמו את לוח הכפל של החבורה (פעולת החבורה פה היא הרכבת

פונקציות) הכוללת שש פונקציות $R \setminus \{0,1\} \rightarrow R \setminus \{0,1\}$, x , $\frac{1}{x}$,

$$\frac{x-1}{x}, 1-x, \frac{x}{x-1}, \frac{1}{1-x}$$

פיתרון:

\circ	x	$\frac{1}{x}$	$\frac{1}{1-x}$	$\frac{x}{x-1}$	$1-x$	$\frac{x-1}{x}$
x	x	$\frac{1}{x}$	$\frac{1}{1-x}$	$\frac{x}{x-1}$	$1-x$	$\frac{x-1}{x}$
$\frac{1}{x}$	$\frac{1}{x}$	x	$1-x$	$\frac{x-1}{x}$	$\frac{1}{1-x}$	$\frac{x}{x-1}$
$\frac{1}{1-x}$	$\frac{1}{1-x}$	$\frac{x}{x-1}$	$\frac{x-1}{x}$	$1-x$	$\frac{1}{x}$	x
$\frac{x}{x-1}$	$\frac{x}{x-1}$	$\frac{1}{1-x}$	$\frac{1}{x}$	x	$\frac{x-1}{x}$	$1-x$
$1-x$	$1-x$	$\frac{x-1}{x}$	$\frac{x}{x-1}$	$\frac{1}{1-x}$	x	$\frac{1}{x}$
$\frac{x-1}{x}$	$\frac{x-1}{x}$	$1-x$	x	$\frac{1}{x}$	$\frac{x}{x-1}$	$\frac{1}{1-x}$