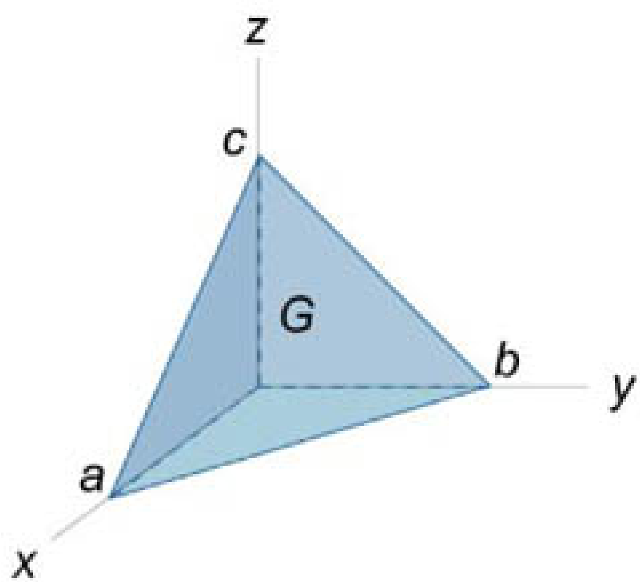
פתרון תרגיל 8 אינפי 4

19 במאי 2015

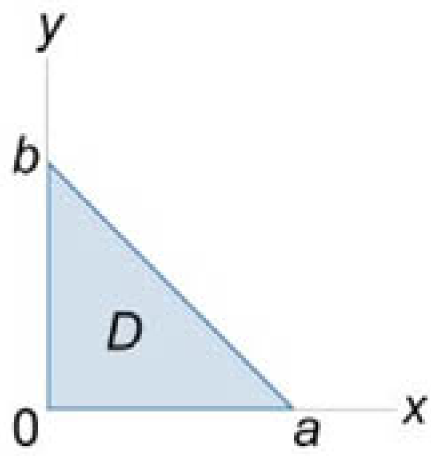
1. התחום שלנו הוא:



לפי משפט הדיברגנץ:

$$\iint_S = \iiint_G (2+3+4)dxdydz = 9 \cdot \iiint_G dxdydz$$

תחום האינטגרציה D על מישור xy, כאשר $z=0$ הוא:



ובתחום זה מתקיים:

$$\frac{x}{a}+\frac{y}{b}\leq 1 \Longrightarrow y\leq b-\frac{bx}{a}$$

באופן דומה:

$$z\leq c-\frac{cx}{a}-\frac{cy}{b}$$

ואם כן תחומי האינטגרציה שלנו הם:

$$0\leq x\leq a, 0\leq y\leq b-\frac{bx}{a}, 0\leq z\leq c-\frac{cx}{a}-\frac{cy}{b}$$

והאינטגרל שלנו יהיה:

$$9\cdot\iiint\limits_G dxdydz=\int\limits_0^a\int\limits_0^{b-\frac{bx}{a}}\int\limits_0^{c-\frac{cx}{a}-\frac{cy}{b}}dzdydx=\int\limits_0^a\int\limits_0^{b-\frac{bx}{a}}(c-\frac{cx}{a}-\frac{cy}{b})dydx=$$

$$=9c\cdot\int\limits_0^a((1-\frac{x}{a})y-\frac{y^2}{2b})|_{y=0}^{y=b-\frac{bx}{a}}dx=\frac{9bc}{2a^2}\cdot(a^2x-ax^2+\frac{x^3}{3})_0^a=\frac{3abc}{2}$$

2. כדי לחשב את הנפח, נשתמש במשפט הדיברגנץ ובנוסחה:

$$V = \left| \frac{1}{3} \iint\limits_S x dy dz + y dx dz + z dx dy \right|$$

פרמטריזציה של המשטח S היא:

$$\phi(u,v) = (a\cos u \sin v, b \sin u \sin v, c \cos v)$$

כאשר $(u,v) \in [0,2\pi] \times [0,\pi]$. וקטורי הנגזרות הם:

$$\phi_u = (-a\sin u \sin v, b\cos u \sin v, 0)$$

$$\phi_v = (a\cos u \cos v, b \sin u \cos v, -c\sin v)$$

והמכפלה הוקטורית תהיה:

$$\phi_u \times \phi_v = \begin{vmatrix} i & j & k \\ -a\sin u \sin v & b\cos u \sin v & 0 \\ a\cos u\cos v & b\sin u\cos v & -c\sin v \end{vmatrix} =$$

$$= (-bc\cos u \sin^2 v, -ac\sin u \sin^2 v, -ab\cos v \sin v)$$

כעת:

$$F(\phi(u,v)) = \phi(u,v) = (a\cos u\sin v, b\sin u\sin v, c\cos v)$$

והאינטגרל שלנו יהיה:

$$V=\frac{1}{3}\iint\limits_{D}(a\cos u\sin v,b\sin u\sin v,c\cos v)\cdot(-bc\cos u\sin^2 v,-ac\sin u\sin^2 v,-ab\cos v\sin v)dudv=$$

$$=-\frac{abc}{3}\iint\limits_{D}(\cos^2 u\sin^3 v+\sin^2 u\sin^3 v+\cos^2 v\sin v)dudv=$$

כעת, $D=[0,2\pi]\times[0,\pi]$ וגם:

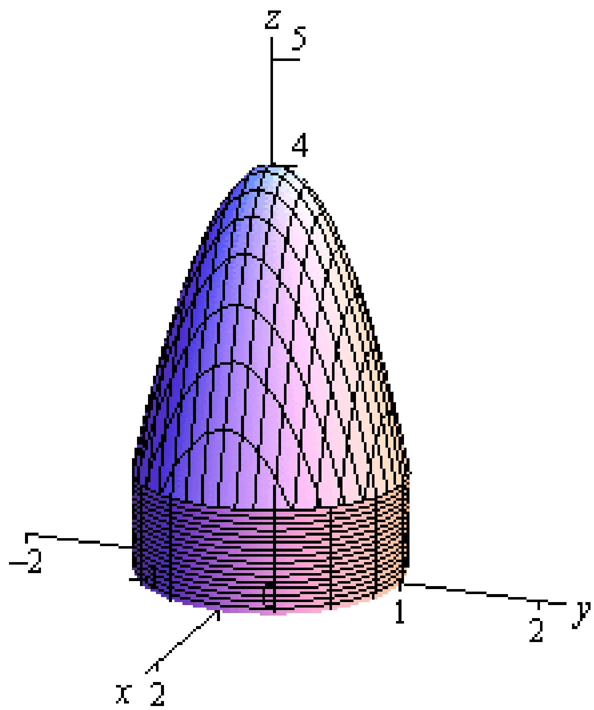
$$\cos^2 u\sin^3 v+\sin^2 u\sin^3 v+\cos^2 v\sin v=\sin^3 v-(1-\sin^2 v)\sin v=-\sin v$$

והאינטגרל יהיה:

$$=-\frac{abc}{3}\int\limits_{0}^{2\pi}\int\limits_{0}^{\pi}-\sin v dvdu=\frac{4\pi abc}{3}$$

וזהו הנפח (אם האינטגרל היה יוצא שלילי היינו לוקחים ערך מוחלט, כמובן).

3. הגוף שלנו הוא:



כמו ראש של קליע (כל אחד כיד הדמיון הטובה עליו).

לפי משפט הדיברגנץ:

$$\iint\limits_S F\cdot\vec{n}dS=\iiint\limits_G (y-y+1)dxdydz=\iiint\limits_G dxdydz$$

קואורדינטות גליליות מתבקשות כאן, ונקבל:

$$0\le z\le 4-3r^2, 0\le r\le 1, 0\le\theta\le 2\pi$$

היעקוביאן הוא r ולכן:

$$\iiint\limits_G dxdydz=\int\limits_0^{2\pi}\int\limits_0^{1}\int\limits_0^{4-3r^2} rdzdrd\theta=\int\limits_0^{2\pi}\int\limits_0^{1}(4r-3r^3)drd\theta=2\pi\cdot(2r^2-\frac{3r^4}{4})_0^1=\frac{5\pi}{2}$$

וזהו האינטגרל שלנו.

אפשר גם לחלק את הגוף שלנו לגליל ולחרוט הקטום ולחשב את נפחיהם; חזקה על האינטגרל $\iiint_G dxdydz$ שיהיה שווה לנפח הגוף.