חידה לתרגול 3

קבוצה נקראת מושלמת אם היא סגורה ואין לה נקודות מבודדות. הוכיחו שאין קבוצה מושלמת בת מניה ב־$\mathbb{R}$? הוכח שיש פונקציה חח"ע ורציפה בין מרחב קנטור (מתרגול 1) לכל תת קבוצה מושלמת של $\mathbb{R}$.

הערה: בהרצאה הקרובה נשתמש בהגדרה קצת שונה של קבוצות מושלמות (אבל שקולה).

פתרון:

נניח ש־$\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}} \subseteq \mathbb{R}$ היא קבוצה מושלמת. נבחר $n_0 := 0$ וגם $\varepsilon_0 := 1$. כעת נבחר באינדוקציה $\{n_k\}_{k\in\mathbb{N}} \subseteq \mathbb{N}$ ו־$\{\varepsilon_k\}_{k\in\mathbb{N}} \subseteq \mathbb{R}^{>0}$ כך ש־

1. $n_{k+1} \in \mathbb{N}$ הוא המינימלי שמקיים $x_{n_{k+1}} \in B(x_{n_k}, \varepsilon_k) \setminus \{x_{n_k}\}$. שימו לב ש־$n_{k+1}$ כזה קיים משום ש־A מושלמת ולכן קיימת תת סדרה שלה שמתכנסת ל־x_{n_k}.

2. $\varepsilon_{k+1} \le \min(\frac{1}{k+1}, \frac{1}{k} - |x_{n_{k+1}} - x_{n_k}|)$. שימו לב שלפי הבחירה של n_{k+1} המספר הזה בהכרח גדול ממש מ־0.

בגלל הקריטריון של המינימליות, לכל $m < n_k$ מתקיים $x_m \notin B(x_{n_k}, \varepsilon_k)$.

נשים לב שלכל $y \in B(x_{n_{k+1}}, \varepsilon_{k+1})$ מתקיים

$$|x_{n_k} - y| \le |x_{n_k} - x_{n_{k+1}}| + |x_{n_{k+1}} - y| \le |x_{n_k} - x_{n_{k+1}}| + \frac{1}{k} - |x_{n_{k+1}} - x_{n_k}| = \frac{1}{k}$$

ולכן $y \in B(x_{n_k}, \varepsilon_k)$. לפי הגדרה מתקיים $B(x_{n_{k+1}}, \varepsilon_{k+1}) \subseteq B(x_{n_k}, \varepsilon_k)$. כתוצאה מכך מתקיים גם $B[x_{n_{k+1}}, \varepsilon_{k+1}] \subseteq B[x_{n_k}, \varepsilon_k]$.

כעת נשים לב ש־$\ldots \subseteq B[x_{n_1}, \varepsilon_1] \subseteq B[x_{n_0}, \varepsilon_0]$ היא סדרה יורדת של קטעים סגורים, וגם $0 \le \lim_{k\in\mathbb{N}} \varepsilon_k \le \lim_{k\in\mathbb{N}} \frac{1}{k} = 0$ ולפי משפט קנטור (מאינפי 1) יש נקודה $x \in \bigcap_{k\in\mathbb{N}} B[x_{n_k}, \varepsilon_k]$. בנוסף ברור ש־$x = \lim_{k\in\mathbb{N}} x_{n_k}$ ולכן זו בעצם נקודת הצטברות של A. לפי הגדרה $x \in A$ ובעצם אפשר לרשום $x = x_m$ עבור $m \in \mathbb{N}$. בבירור קיים $k \in \mathbb{N}$ כך ש־$m < n_k$. מנגד, לפי תכונת המינימליות ראינו ש־$x_m \notin B(x_{n_k}, \varepsilon_k) \supseteq \bigcap_{k\in\mathbb{N}} B[x_{n_k}, \varepsilon_k]$ וזו סתירה.

כעת נראה שניתן לשכן את קבוצת קנטור בכל תת קבוצה מושלמת.

טענה: לכל קבוצה מושלמת $A \subseteq \mathbb{R}$ קיים $x \in \mathbb{R}$ כך ש־$A^{\le x} := \{a \in A \mid a \le x\}$ קבוצה מושלמת לא ריקה.

הוכחת הטענה: נבחר שני אברים שונים $x, y \in A$ (שימו לב שזה אפשרי כי נקודון בהכרח אינו מושלם, לקח לחיים "לא טוב היות האדם לבדו"). נסתכל כעת על אוסף כל הקטעים $\{I_{a,b}\}_{x<a<b<y}$ כאשר $I_{a,b} = [a,b]$. אם לכל $x < a < b < y$ מתקיים ש־$I_{a,b} \cap A \neq \emptyset$, אז A צפופה בקטע $[0,1]$. בגלל ש־$A = A'$ ולכן בפרט $A' \subseteq A$ אנחנו יודעים מהתרגול ש־A סגורה. מכאן אפשר להסיק ש־$[x,y] \subseteq cl(A) = A$. ידוע (גם לכם יהיה ידוע בעוד כמה הרצאות) שאפשר לשכן את קבוצת קנטור בקטע $[x,y]$ ולכן סיימנו.

אחרת, יש קטע כך ש-$A \cap [a,b] = \emptyset$. נבחר $x = a$ ונקבל ש-$A^{\leq x}$ קבוצה מושלמת ולא ריקה.

טיעון דומה יראה ש-$A^{\geq b}$ גם היא קבוצה מושלמת לא ריקה. ניתן להפעיל את הטענה הזו רקורסיבית ולקבל שיכון של $2^{\mathbb{N}}$ (שהיא איזומורפית לקבוצת קנטור) בעזרת משפט קנטור.