

לינארית 2 מדעי המחשב פתרון מועד א תשעו

1. בשאלה זאת נסמן את הבסיס הסטנדרטי של \mathbb{R}^4 ב $E = \{e_1, e_2, e_3, e_4\}$

(א) נבדוק

i. הפונקציה T_3 אינה העתקה לינארית כי

$$T_3(e_3 + e_3) = T_3(2e_3) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 4 \\ 0 \end{pmatrix} \neq \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = T_3e_3 + T_3e_3$$

ii. הפונקציה T_2 אינה העתקה לינארית כי כל ה"ל שולחת 0 ל-0 אך

$$T_2\left(\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$$

ולכן אינה ה"ל

iii. T_1 היא ה"ל היחידה ומכאן ולהבא בשאלה זאת נסמן ב T . נוכיח כי T הפיכה: נגדיר

$$B = \begin{pmatrix} & & & 1 \\ & & 1 & \\ & & & 1 \\ 1 & & & \end{pmatrix}, v = \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \\ d \end{pmatrix}$$

$$Tv = T \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \\ d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} d \\ c \\ b \\ a \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} & & & 1 \\ & & 1 & \\ & & & 1 \\ 1 & & & \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \\ d \end{pmatrix} = Bv$$

ראינו בתירגול שהפונקציה המוגדרת ע"י כפל במטריצה $Bv \mapsto v$ היא ה"ל ולכן T היא ה"ל.

(ב) נסמן $A = [T]_E^E$ ואז מחישוב ישיר

$$A = ([Te_1]_E, [Te_2]_E, [Te_3]_E, [Te_4]_E) = \begin{pmatrix} & & & 1 \\ & & 1 & \\ & & & 1 \\ 1 & & & \end{pmatrix}$$

כעת, הפולינום האופייני של T הוא

$$P_T(\lambda) = |\lambda I - A| = \left| \begin{pmatrix} \lambda & & & -1 \\ & \lambda & -1 & \\ & -1 & \lambda & \\ -1 & & & \lambda \end{pmatrix} \right| =$$

נחבר את השורות 1+2+3 לשורה הרביעית. פעולה זאת לא משנה את הדטרמיננטה

$$= \left| \begin{pmatrix} \lambda & & & -1 \\ & \lambda & -1 & \\ & -1 & \lambda & \\ \lambda-1 & \lambda-1 & \lambda-1 & \lambda-1 \end{pmatrix} \right| = (\lambda-1) \left| \begin{pmatrix} \lambda & & & -1 \\ & \lambda & -1 & \\ & -1 & \lambda & \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \right| =$$

נחסר את מהעמודה הרביעית את העמודה הרשונה וכן נעשה לעמודה השנייה והשלישית ונקבל (בנוסף לפיתוח לפי שורה רביעית)

$$= (\lambda-1) \left| \begin{pmatrix} \lambda & & & -\lambda-1 \\ & \lambda & -1 & \\ & -1 & \lambda & \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \right| = -(\lambda-1) \left| \begin{pmatrix} \lambda & & & -\lambda-1 \\ & \lambda & -1 & \\ & -1 & \lambda & \\ -1 & & & \lambda \end{pmatrix} \right| =$$

נפתח לפי עמודה שלישית ונקבל

$$= (\lambda+1)(\lambda-1) \left| \begin{pmatrix} \lambda & -1 \\ -1 & \lambda \end{pmatrix} \right| = (\lambda+1)(\lambda-1)(\lambda^2-1) = (\lambda+1)^2(\lambda-1)^2$$

(ג) מסעיף קודם נקבל שני ע"ע ± 1 . נחשב ו"ע מתאימים:

i. עבור $\lambda_1 = 1$

$$A-I = \begin{pmatrix} -1 & & & 1 \\ & -1 & 1 & \\ & 1 & -1 & \\ 1 & & & -1 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} -1 & & & 1 \\ & -1 & 1 & \\ & 1 & -1 & \\ 0 & & & 0 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} -1 & & & 1 \\ & -1 & 1 & \\ & 0 & 0 & \\ 0 & & & 0 \end{pmatrix}$$

ולכן

$$V_{\lambda_1=1} = \left\{ \begin{pmatrix} s \\ t \\ t \\ s \end{pmatrix} : s, t \in \mathbb{R} \right\} = \text{span} \left\{ v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, v_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right\}$$

ii. עבור $\lambda_2 = -1$

$$A+I = \begin{pmatrix} 1 & & & 1 \\ & 1 & 1 & \\ & 1 & 1 & \\ 1 & & & 1 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & & & 1 \\ & 1 & 1 & \\ & 1 & 1 & \\ 0 & & & 0 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & & & 1 \\ & 1 & 1 & \\ & 0 & 0 & \\ 0 & & & 0 \end{pmatrix}$$

ולכן

$$V_{\lambda_2=-1} = \left\{ \begin{pmatrix} -s \\ -t \\ t \\ s \end{pmatrix} : s, t \in \mathbb{R} \right\} = \text{span} \left\{ v_3 = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, v_4 = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right\}$$

כיוון שפ"א של T מתפרק לגורמים לינארית + לכל ע"ע הר"א = ר"ג נסיק כי T לכסינה.
נגדיר

$$P = (v_1, v_2, v_3, v_4)$$

ונקבל

$$P^{-1}AP = \begin{pmatrix} 1 & & & \\ & 1 & & \\ & & -1 & \\ & & & -1 \end{pmatrix} = D$$

או באופן שקול $A = PDP^{-1}$ (מי שרוצה לדייק בתשובתו, נגדיר $P = (P_1, D = D_1)$)

.2

(א) נראה כי T ה"ל : לכל $f, g \in V$ ולכל $\alpha \in \mathbb{R}$ מתקיים כי

$$T(\alpha f + g) = [\alpha f + g]'' + 2[\alpha f + g]' = \alpha f'' + g'' + 2(\alpha f' + g') = \alpha(f'' + 2f') + g'' + 2g' = \alpha T(f) + T(g)$$

וסיימו. נחשב מטריצה מייצגת ל T לפי הבסיס הסטנדרטי $S = \{1, x, x^2\}$:

$$[T]_S^S = ([T(1)]_S, [T(x)]_S, [T(x^2)]_S) = \begin{pmatrix} 0 & -2 & 2 \\ 0 & 0 & -4 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$\dim \text{Im}(T) = \text{rank}(T) = \text{rank}([T]_S^S) = 2$ כי המטריצה מדורגת ורואים כי כעת, משפט הדרגה אומר כי

$$3 = \dim V = \dim \ker T + \dim \text{Im} T$$

$$\dim \ker T = 3 - 2 = 1 \text{ ולכן}$$

(ב) הפ"א של T הוא

$$P_T(\lambda) = \left| \lambda I - [T]_S^S \right| = \left| \begin{pmatrix} \lambda & 2 & -2 \\ 0 & \lambda & 4 \\ 0 & 0 & \lambda \end{pmatrix} \right| = \lambda^3$$

ולכן $m_T(\lambda) = \lambda^i$ עבור $i \in \{1, 2, 3\}$. נבדוק

- i. עבור $i = 1$ נקבל כי $[T]_S^S \neq 0$ ולכן אפשרות זאת נפסלת
- ii. עבור $i = 2$ נקבל כי $[T]_S^S \neq 0$ ולכן אפשרות זאת

נפסלת

- iii. נשארו עם אפשרות $i = 3$ שאכן מתקיים (גם לפי משפט קיילי המילטון) כי
- $$([T]_S^S)^3 = 0$$

כיוון ש $m_T(\lambda)$ אינו מתפרק לגורמים לינארים שונים ממעלה 1 נקבל כי T אינה לכסינה

(ג) הפ"מ $m_T(\lambda)$ חושב בסעיף הקודם והוא שווה ל λ^3

.3

(א) נוכיח כי זוהי מ"פ. לכל $\left(\begin{matrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{matrix} \right), \left(\begin{matrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{matrix} \right), \left(\begin{matrix} c_1 \\ c_2 \\ c_3 \end{matrix} \right) \in V$ ולכל $\alpha \in \mathbb{R}$

מתקיים

i.

$$\begin{aligned} \left\langle \left(\begin{matrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{matrix} \right) + \left(\begin{matrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{matrix} \right), \left(\begin{matrix} c_1 \\ c_2 \\ c_3 \end{matrix} \right) \right\rangle &= \left\langle \left(\begin{matrix} a_1 + b_1 \\ a_2 + b_2 \\ a_3 + b_3 \end{matrix} \right), \left(\begin{matrix} c_1 \\ c_2 \\ c_3 \end{matrix} \right) \right\rangle = \\ &= (a_1 + b_1)c_1 + 2(a_2 + b_2)c_2 + 3(a_3 + b_3)c_3 = \\ &= (a_1c_1 + 2a_2c_2 + 3a_3c_3) + (b_1c_1 + 2b_2c_2 + 3b_3c_3) = \\ &= \left\langle \left(\begin{matrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{matrix} \right), \left(\begin{matrix} c_1 \\ c_2 \\ c_3 \end{matrix} \right) \right\rangle + \left\langle \left(\begin{matrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{matrix} \right), \left(\begin{matrix} c_1 \\ c_2 \\ c_3 \end{matrix} \right) \right\rangle \end{aligned}$$

ii.

$$\begin{aligned} \left\langle \alpha \left(\begin{matrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{matrix} \right), \left(\begin{matrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{matrix} \right) \right\rangle &= \left\langle \left(\begin{matrix} \alpha a_1 \\ \alpha a_2 \\ \alpha a_3 \end{matrix} \right), \left(\begin{matrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{matrix} \right) \right\rangle = \\ &= \alpha a_1 b_1 + 2\alpha a_2 b_2 + 3\alpha a_3 b_3 \\ &= \alpha (a_1 b_1 + 2a_2 b_2 + 3a_3 b_3) \\ &= \alpha \left\langle \left(\begin{matrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{matrix} \right), \left(\begin{matrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{matrix} \right) \right\rangle \end{aligned}$$

(ב) נבצע תהליך גרס שמידט שבסופו נקבל קבוצה א"ג $W = \{w_1, w_2, w_3\}$ שֶנרמל
-נחשב

$$w_1 = v_1$$

$$w_2 = v_2 - \frac{\langle v_2, w_1 \rangle}{\|w_1\|^2} w_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} - \frac{3}{6} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$$

$$w_3 = v_3 - \frac{\langle v_3, w_1 \rangle}{\|w_1\|^2} w_1 - \frac{\langle v_3, w_2 \rangle}{\|w_2\|^2} w_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} - \frac{1}{6} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} - \frac{1/2}{6/4} \cdot \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} - \frac{1}{6} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} - \frac{1}{6} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

כעת נרמל ($\|w_1\| = \sqrt{6}, \|w_2\| = \sqrt{3/2}, \|w_3\| = \frac{2}{3}$) ונקבל

$$\left\{ u_1 = \frac{1}{\sqrt{6}} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, u_2 = \frac{1}{\sqrt{6}} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}, u_3 = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} \right\}$$

בסיס א"ג.

(ג) נחשב

$$\Pi_W(u) = \langle u, u_1 \rangle u_1 + \langle u, u_2 \rangle u_2 = \frac{1}{\sqrt{6}} 14 \cdot \frac{1}{\sqrt{6}} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} + \frac{1}{\sqrt{6}} (-4) \cdot \frac{1}{\sqrt{6}} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} =$$

$$= \frac{14}{6} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} - \frac{4}{6} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} = \frac{1}{6} \begin{pmatrix} 10 \\ 10 \\ 18 \end{pmatrix}$$

4. נכון. צריך לבצע 5 החלפות עמודות (את עמודה 1 עם 10, את עמודה 2 עם 9 וכו').
כל החלפה עמודות גורמת להכפלת הדט' ב מינוס 1 ולכן

$$\det(A') = (-1)^5 \det(A) = -\det(A)$$

5. לא נכון. לפי משפט

$$\text{rank}(AA') \leq \text{rank}(A)$$

כיוון ש A יש עמודה 1 אזי דרגתה קטנה שווה ל 15 בפרט $1 < 7$
ולכן לא הפיכה (מטריצות מסדר 7×7 הפיכות אמ"מ דרגתם = 7)

6. נכון. אם $T : V \rightarrow W$ הפיכה אזי $\dim V = \dim W$ אבל אצלנו מימדי התחום והטווח הינם שווים ($5776 \neq 2016$)

7. נכון. לפי משפט הדרגה, עבור $T : V \rightarrow V$ ה"ל, מתקיים כי

$$\dim \ker T + \dim \operatorname{Im} T = \dim V$$

אזי T על אמ"מ $\dim \operatorname{Im} T = \dim V$ אמ"מ $\dim \ker T = 0$

8. נכון. מטריצה אינה הפיכה אמ"מ יש לה ע"ע $0 = \text{אמ"מ } 0$ הוא שורש של הפ"א. כיוון ש $p_A(0) = 1 \neq 0$ נקבל כי A הפיכה.

9. לא נכון. למשל

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, A^t = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

לשתיים יש ע"ע יחיד שהוא 0 אבל:

ל A הוקטור העצמי המתאים הוא $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ ואילו
ל A^t הוקטור העצמי המתאים הוא $\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$.

10. אם הפ"א מתפרק לגורמים לינארים (למשל מעל \mathbb{C}) אזי כן. כי בנוסף לכך מתקיים כי הר"ג = ר"א לכל ע"ע (בשל העובדה שהר"ג חסום בין 1 לבין הר"א + ר"א=1) אם הפ"א לא מתפרק לגורמים לינארים אזי לא כי תנאי הכרחי שמטריצה לכסינה הוא שהפ"א מתפרק לגורמים לינארים. למשל

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{2 \times 2}$$

11. נכון. כיוון ש $m_A(x) = x^3$ ולפ"מ ולפ"א יש אותם גורמים נקבל כי השורש היחיד של הפ"א הוא 0 כלומר רק 0. כלומר למשוואה $|\lambda I - A| = 0$ יש פתרון יחיד והוא 0. אם המטריצה $I - A$ היתה עם דטר' 0 אזי היה עוד פתרון ששווה ל-1. לכן נסיק כי למטריצה $I - A$ יש דטר' שונה מאפס, כלומר הפיכה.

12. לא נכון. למשל

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{2 \times 2}$$

אינה לכסינה (הפ"א לא מתפרק לגורמים לינארים) ואילו

$$A^2 = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{2 \times 2}$$

כן לכסינה (היא אלכסונית!)

13. לא נכון. למשל הפ"א של

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, A' = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

שווה ל x^2 אבל אין להם אותה צורת זורדן (A, A' כבר בצורת זורדן והם אינם שוות)

14. לא נכון. למשל ב $V = \mathbb{R}^2$ עם המכפלה הפנימית הסטנדרטית מתקיים כי

$$v = (1, 0), u = \left(-\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2}\right)$$

בעלי נורמה 1 וגם

$$v + u = \left(\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2}\right)$$

עם נורמה 1.

15. לא נכון. למשל $V = \mathbb{R}^3$ עם המכפלה הפנימית הסטנדרטית מתקיים כי $u = e_1$ אורתוגונאלי ל $v = e_2$ וגם $v = e_2$ אורתוגונאלי ל $w = e_3$ ובנוסף גם u אורתוגונאלי ל w (כאשר $\{e_1, e_2, e_3\}$ הבסיס הסטנדרטי)