<u>מערכות לינאריות עם מקדמים קבועים</u>

מערכת לינארית הומוגנית עם מקדמים קבועים:

$$\overrightarrow{y'} = A\,\vec{y}$$

מערכת לינארית אי הומוגנית עם מקדמים קבועים:

$$\overrightarrow{y'} = A\,\vec{y} + \vec{b}(x)$$

ניתן לפתור מערכת לינארית אי הומוגנית עם מקדמים קבועים ע"י וריאציית מקדמים.

שיטת "המשמיד"

ניתן לנחש צורת פתרון פרטי למערכת האי הומוגנית, להציב במשוואה ולחשב את המקדמים.

דוגמה

$$\boxed{y' = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 3 \end{pmatrix} y + \begin{pmatrix} x \\ 1 \end{pmatrix}}$$

תחילה, נפתור את המערכת ההומוגנית המתאימה:

$$y' = y' = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 3 \end{pmatrix} y$$

- הפולינום האופייני:

$$\lambda^2 - 4\lambda + 4 = 0$$

- הערכים העצמיים:

$$\lambda = 2$$

והוא ערך עצמי כפול.

- הווקטורים העצמיים:

$$\ker\begin{pmatrix} -1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = c \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$$

לכן, הפתרון הכללי:

$$y = \begin{pmatrix} a + bx \\ c - bx \end{pmatrix} \cdot e^{2x}$$

נגזור:

$$y' = \begin{pmatrix} 2a + 2bx + b \\ 2c - 2bx - b \end{pmatrix} \cdot e^{2x}$$

נציב במשוואה:

$$\begin{pmatrix} 2a + 2bx + b \\ 2c - 2bx - b \end{pmatrix} \cdot e^{2x} = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} a + bx \\ c - bx \end{pmatrix} \cdot e^{2x}$$

לכן:

$$(1): \quad 2a + b \quad = \quad a - c$$

$$(2): \quad 2c - b \quad = \quad a + 3c$$

$$\Downarrow$$

$$a + b \quad = \quad -c$$

לכן:

$$y_h = \begin{pmatrix} a + bx \\ -a - b - bx \end{pmatrix} \cdot e^{2x} \quad ; \quad a, b \in \mathbb{R}$$

$$\square$$

כעת, נפתור את המערכת האי הומוגנית.

נפתור בשתי הדרכים.

<u>וריאציית מקדמים</u>

ניקח שני פתרונות בלתי תלויים לינארית למשוואה ההומוגנית המתאימה.

$$a = 1, b = 0: \quad y_1 \quad = \quad \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} \cdot e^{2x}$$

$$a = 0, b = 1: \quad y_1 \quad = \quad \begin{pmatrix} x \\ -1 - x \end{pmatrix} \cdot e^{2x}$$

$$\Downarrow$$

$$\begin{aligned} \mathcal{Y} \quad &= \quad \begin{pmatrix} e^{2x} & xe^{2x} \\ -e^{2x} & (-1 - x)e^{2x} \end{pmatrix} \\ &= \quad \begin{pmatrix} 1 & x \\ -1 & -1 - x \end{pmatrix} \cdot e^{2x} \end{aligned}$$

לכן, הפתרון הכללי:

$$\mathcal{Y}\cdot\begin{pmatrix}c_1(x)\\c_2(x)\end{pmatrix}$$

כאשר:

$$\mathcal{Y}\cdot\begin{pmatrix}{c_1}'\\{c_2}'\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}x\\1\end{pmatrix}$$

נפתור את הערכת ע״י כלל קרמר.

$$\begin{aligned}\mathcal{Y}_1 &= \begin{pmatrix}x & xe^{2x}\\1 & (-1-x)e^{2x}\end{pmatrix}\\ \mathcal{Y}_2 &= \begin{pmatrix}e^{2x} & x\\-e^{2x} & 1\end{pmatrix}\end{aligned}$$

נחשב:

$$\begin{aligned}\det\mathcal{Y} &= -e^{4x}\\ \det\mathcal{Y}_1 &= e^{2x}\cdot(-x^2-2x)\\ \det\mathcal{Y}_2 &= e^{2x}\cdot(1+x)\end{aligned}$$

לכן:

$$\begin{aligned}c_1'(x) &= \frac{\det\mathcal{Y}_1}{\det\mathcal{Y}}\\ &= (x^2+2x)\cdot e^{-2x}\end{aligned}$$

נבצע אינטגרציה, ונקבל:

$$\begin{aligned}c_1(x) &= \int(x^2+2x)\cdot e^{-2x}\,dx\\ &\overset{(1)}{=} -\frac{1}{2}(x^2+2x)e^{-2x}-\frac{1}{2}(x+1)e^{-2x}-\frac{1}{4}e^{-2x}+k_1\end{aligned}$$

(1): אינטגרציה בחלקים.

$$\begin{aligned}c_2'(x) &= \frac{\det\mathcal{Y}_2}{\det\mathcal{Y}}\\ &= (-1-x)\cdot e^{-2x}\end{aligned}$$

נבצע אינטגרציה, ונקבל:

$$\begin{aligned} c_1(x) &= \int (1-x)\cdot e^{-2x}\,dx \\ &\overset{(1)}{=} \frac{1}{2}(x+1)e^{-2x}+\frac{1}{4}e^{-2x}+k_2 \end{aligned}$$

(1) : אינטגרציה בחלקים.

לכן, הפתרון הכללי :

$$\begin{aligned} y &= \mathcal{Y}\cdot\begin{pmatrix} c_1(x) \\ c_2(x) \end{pmatrix} \\ &= e^{2x}\cdot\begin{pmatrix} 1 & x \\ -1 & -1-x \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} -\frac{1}{2}x^2-\frac{3}{2}x-\frac{3}{4} \\ \frac{1}{2}x+\frac{3}{4} \end{pmatrix}\cdot e^{-2x}+\mathcal{Y}\cdot\begin{pmatrix} k_1 \\ k_2 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} -\frac{3}{4}x-\frac{3}{4} \\ \frac{1}{4}x \end{pmatrix}+\mathcal{Y}\cdot\begin{pmatrix} k_1 \\ k_2 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

לכן :

$$y = \overbrace{\begin{pmatrix} -\frac{3}{4}x-\frac{3}{4} \\ \frac{1}{4}x \end{pmatrix}}^{\text{פתרון אי הומוגני פרטי}} + \overbrace{\mathcal{Y}\cdot\begin{pmatrix} k_1 \\ k_2 \end{pmatrix}}^{\text{פתרון הומוגני כללי}}$$

רצוי להציב במשוואה ולבדוק.

$\square$

<u>שיטת "המשמיד"</u>

אין גורם חופף בין האופרטורים המשמידים, לכן קיים פתרון מהצורה :

$$y_p = \begin{pmatrix} ax+b \\ cx+d \end{pmatrix}$$

נגזור :

$$y_p{}' = \begin{pmatrix} a \\ c \end{pmatrix}$$

נחשב :

$$\begin{pmatrix}1 & -1\\ 1 & 3\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}ax+b\\ cx+d\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}(a-c)x+(b-d)\\ (a+3c)x+(b+3d)\end{pmatrix}$$

נציב במשוואה, ונקבל:

$$\begin{pmatrix}a\\ c\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}(a-c+1)x+(b-d)\\ (a+3c)x+(b+3d+1)\end{pmatrix}$$

לכן:

$$\begin{aligned}(1):&\quad a-c+1 = 0\\ (2):&\quad a+3c = 0\end{aligned}$$

$$\Downarrow$$

$$-4c+1 = 0$$

$$\Downarrow$$

$$c = -\frac{3}{4}$$

$$a = \frac{1}{4}$$

לכן:

$$\begin{aligned}(3):&\quad -\frac{3}{4} = b-d\\ (4):&\quad -\frac{3}{4} = b+3d\end{aligned}$$

$$\Downarrow$$

$$-4d = 0$$

$$\Downarrow$$

$$d = 0$$

$$b = -\frac{3}{4}$$

לכן:

$$y_p = \begin{pmatrix} -\frac{3}{4}x - \frac{3}{4} \\ \frac{1}{4}x \end{pmatrix}$$

■