תרגול 11 בדידה להנדסה

22 בינואר 2015

הגדרה:

נאמר שפונקציה $f : A \to B$ היא הפיכה, אם קיימת פונקציה $g : B \to A$ כך שמתקיים:

$$f \circ g = Id_B$$

$$g \circ f = Id_A$$

נסמן: $g = f^{-1}$ ונאמר ש-g היא ההופכית של f (וכן $f = g^{-1}$ ו-f היא ההופכית של g).

*פונקציה היא הפיכה אם ורק אם היא חח"ע ועל.

<u>לדוגמה:</u>

$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ המוגדרת ע"י $f(x) = 6x - 2$. בתרגול הקודם ראינו שהיא חח"ע ועל.

ההופכית שלה היא $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ המוגדרת ע"י:

$$g(x) = \frac{x+2}{6}$$

באופן כללי, ההופכית של פונקציה מהצורה $f(x) = ax + b$ היא הפונקציה $f^{-1}(x) = \frac{x-b}{a}$.

פונקציה היא הפיכה רק אם אפשר להפוך אותה "משני הצדדים", כמו שהגדרנו למעלה.

אם למשל נתבונן בפונקציות $f,g:\mathbb{N}\cup\{0\}\to\mathbb{N}\cup\{0\}$ המוגדרות ע"י:

$$f(n)=n+1$$

$$g(n)=\begin{cases} n-1 & n\neq 0 \\ 0 & 0 \end{cases}$$

נקבל שמתקיים: $g\circ f(n)=Id$ אך אם נרכיב הפוך כלל לא נקבל פונקציה על (ל-0 לא יהיה מקור).

<u>תרגיל:</u>

תהי $f:A\to B$ פונקציה. נגדיר יחס R על $P(B)$ ע"י:

$$(X,Y)\in R \iff f^{-1}(X)\triangle f^{-1}(Y)=\phi$$

הוכיחו שזהו יחס שקילות.

<u>פתרון:</u>

נבדוק ששלוש התכונות מתקיימות.

1. רפלקסיביות:

יהי $X\in P(B)$. $f^{-1}(X)\triangle f^{-1}(X)=\phi$ ולכן לפי הגדרת היחס $(X,X)\in R$ ולכן היחס רפלקסיבי.

2. סימטריות:

יהי $(X,Y)\in R$. לכן לפי הגדרת היחס, $f^{-1}(X)\triangle f^{-1}(Y)=\phi$, לכן גם: $f^{-1}(Y)\triangle f^{-1}(X)=\phi$ ולכן $(Y,X)\in R$ ולכן היחס סימטרי.

3. טרנזיטיביות:

יהיו $(X,Y),(Y,Z)\in R$. לכן: $f^{-1}(Y)\triangle f^{-1}(Z)=\phi$ וגם $f^{-1}(X)\triangle f^{-1}(Y)=\phi$.

לכל 3 קבוצות A,B,C מתקיים:

$$A\triangle C\subseteq(A\triangle B)\cup(B\triangle C)$$

ולכן במקרה שלנו:

$$f^{-1}(X)\triangle f^{-1}(Z)\subseteq (f^{-1}(X)\triangle f^{-1}(Y))\cup (f^{-1}(Y)\triangle f^{-1}(Z))=\phi$$

ולכן:

$$f^{-1}(X)\triangle f^{-1}(Z)=\phi$$

ולפי הגדרת היחס, $(X,Z)\in R$ ולכן היחס טרנזיטיבי.

סה"כ היחס הוא יחס שקילות.

<u>סימון:</u>

נסמן את קבוצת הפונקציות מ$-A$ ל$-B$ כך:

$$B^A=\{f|f:A\to B\}$$

עוצמות:

עוצמה של קבוצה סופית היא מספר האיברים בה. כך גם אינטואיטיבית לקבוצות אינסופיות.

נסמן את עוצמתה של הקבוצה A ב$-|A|$.

נסמן גם:

$$|\mathbb{N}|=\aleph_0$$

$$|\mathbb{R}|=\aleph$$

<u>מתקיים:</u>

$|\mathbb{N}|=|\mathbb{Q}|=|\mathbb{Z}|$.

הגדרה:

תהיינה A, B שתי קבוצות.

נאמר ש־$|A| = |B|$ אם קיימת $f : A \to B$ חח"ע ועל.

נאמר ש־$|A| \leq |B|$ אם קיימת $f : A \to B$ חח"ע (או $f : B \to A$ על).

משפט קנטור שרדר ברנשטיין:

אם $|A| \leq |B|$ וגם $|B| \leq |A|$ אז $|A| = |B|$.

לכאורה אין במשפט כל רבותא, אך חשוב לזכור שעוצמות הן לא מספרים ואין לנו מושג "איך הן מתנהגות", אלא לפי ההגדרות.

לכן חייבים להיות עדינים וזהירים כשתמעסקים עם יצורים כאלה, ולא לקפוץ למסקנות נמהרות.

<u>תרגיל:</u>

$|\mathbb{N} \cup \{0\}| = |\mathbb{N}|$

<u>פתרון:</u>

נגדיר $f : \mathbb{N} \cup \{0\} \to \mathbb{N}$ ע"י:

$$f(n) = n + 1$$

קל לראות שהפונקציה הזו חח"ע ולכן לפי ההגדרה:

$$|\mathbb{N} \cup \{0\}| \leq |\mathbb{N}|$$

נגדיר $g : \mathbb{N} \to \mathbb{N} \cup \{0\}$ ע"י:

$$g(n) = n$$

קל לראות שזו פונקציה חח"ע ולכן לפי ההגדרה:

$$|\mathbb{N}| \leq |\mathbb{N} \cup \{0\}|$$

ולכן, לפי משפט קנטור שרדר ברנשטיין נקבל:

$$|\mathbb{N}| = |\mathbb{N} \cup \{0\}|$$