**פתרון תרגיל בית 3 במבנים אלגבריים**

**89-214 סמסטר א' תשע''ח**

**הוראות** בהגשת הפתרון יש לרשום בכל דף שם מלא, מספר ת"ז ומספר קבוצת תרגול.

**שאלה 1.** רשמו את התמורות הבאות כמכפלה של מחזורים זרים:

א. $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 \\ 4 & 7 & 3 & 5 & 1 & 6 & 2 \end{pmatrix}$

ב. $(1452)(13)(3)(2514)$

**פתרון:**

א. נסמן את התמורה הנתונה σ.מפרקים לפי הדרך שראינו בתרגול. נקבל:

σ =(1 4 5)(2 7)

ב. לאחר שנכפול נקבל

σ =(1 5 3 4)

**שאלה 2.**מצאו תת-חבורה מסדר 20 ב-$S_{10}$.

**פתרון:** נמצא תת חבורה מסדר 20 ב-$S_{10}$.ראיתם בתרגול כי סדר מכפלות מחזורים זרים ב Sn-הוא הכמ"מ ( lcm) של הסדרים שלהם.נתבונן באיבר (6 7 8 9) (1 2 3 4 5)= σ.נשים לב כי הם אכן מחזורים זרים. כמו כן, נשים לב כי

.o (σ) = [4, 5] = 20

ראיתם גם שסדר האיבר שווה לסדר תת־החבורה שאיבר זה יוצר, ולכן $\langle\sigma\rangle \le S_{10}$ עונה על הדרישות.

**שאלה 3.** תהי $\sigma \in S_9$ מסדר 5. עבור כמה $1 \le k \le 9$ מתקיים $\sigma(k) = k$?

**פתרון:** נשים לב כי הפרק למחזורים זרים חייב להיות (∗,∗,∗,∗,∗) (וודאו שאתם מבינים למה) ולכן עבור ארבעה k-ים מתקיים .σ(k)=k

**שאלה 4.** נתונה הגדרה חלקית של תמורה,

$$\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 \\ 3 & 1 & 2 & ? & ? & 7 & 8 & 9 & 6 \end{pmatrix} \in S_9$$

ידוע כי התמורה זוגית. חשבו את σ(4) ואת σ(5).

**פתרון:** נשים לב כי בפרוק של σ יופיעו המחזורים

(1 3 2) (6 7 8 9)

כמו כן, נשים לב שהמכפלה הנ"ל אי זוגית. ולכן צריך להוסיף חילוף. מכאן בהכרח נקבל

σ(5)=4 ,σ(4)=5

**שאלה 5.** עבור כל אחת מהפונקציות הבאות, קבעו והוכיחו האם היא הומומורפיזם או לא .אם כן, האם היא מונומורפיזם, אפימורפיזם או איזומורפיזם.

א. $f: \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}_n$ המוגדרת ע"י $f(a) = a\ mod(n)$.

ב. עבור חבורה $G$ ואיבר $x \in G$, $f: G \to G$ המוגדרת ע"י $f(g): x^{-1}gx$ .

ג. $f: S_7 \to \mathbb{Z}$ המוגדרת ע"י $f(\sigma) = \sigma(1)$ .

**פתרון:**

א. זהו המומו' שכן ידוע כי לכל $a,b\in \mathbb{Z}$ :

$$(a+b)(mod\ n) = (a(mod\ n) + b(mod\ n))(mod\ n)$$

על: כי לכל $a\in\{0,1\ldots n\text{-}1\}$ מתקיים $f(a) = a\ mod(n)$.

הפונקציה לא חח"ע כי למשל אם ניקח $\mathbb{Z}_5$ מתקיים $f(0)=f(5)=0\ (mod\ 5)$ אבל $0\neq 5$ ב$\mathbb{Z}$ .

ולכן f היא אפימורפיזם.

ב. זהו הומומרפיזם .לכל $g,h\in G$ מתקיים $f(g)f(h)=(x^{-1}gx)(x^{-1}hx) = x^{-1}ghx = f(gh)$

על: לכל $y\in G$ מתקיים $f(xyx^{-1}) = y$.

חח"ע : אם $xyx^{-1} = e$ אז אפשר לכפול מימין ומשמאל ולקבל ש$y= xyx^{-1} = e$.

קיבלנו ש$f$ איזומורפיזם.

ג. התמונה של הזהות היא לא אפס (איבר היחידה ) ולכן זה לא יכול להיות הומומורפיזם.