תרגיל 9 – אלגברה מופשטת 1

1. תהי G חבורה, ו- $A,B\leq G$ שתי תת חבורות שלה. הוכיחו שכל שתיים מבין התכונות הבאות גוררות את השלישית:

א. $A\bigcap B=\{1\}$;

ב. $AB=G$;

ג. $|A|\cdot|B|=|G|$.

2. תהי G חבורה מסדר pq עבור p,q ראשוניים שונים. נתון כי יש ל G תת חבורה נורמלית מסדר p ותת חבורה נורמלית מסדר q. הוכיחו כי G ציקלית.

3. תהי G חבורה ו $H,K\leq G$ תת חבורות משלימות. הוכיחו: לכל $h\in H,k\in K$ הקומוטטור $[h,k]=e$ אם ורק אם H,K תת חבורות נורמליות של G.

4. תהי G חבורה סופית ו $H\leq G$ תת חבורה מאינדקס 2. נניח שקיים אפימורפיזם $\varphi:G\to H$ כך ש $Ker\varphi$ לא מוכל ב H. הוכיחו כי $G\cong H\times Z_2$.

5. ענו על הסעיפים הבאים:

5.1 תהי G חבורה לא ציקלית מסדר p^2 עבור p ראשוני. הוכיחו כי

$$G\cong Z_p\times Z_p$$

רמז: קחו תת חבורה ציקלית H מסדר p בתוך G. קחו איבר שלא שייך לחבורה H והוכיחו כי הוא יוצר תת חבורה K מסדר p של G כך ש K ו H משלימות ונורמליות.

5.2 תהא G חבורה לא אבלית מסדר 2197. הוכיחו כי $G/Z(G)$ היא חבורה אבלית, לא ציקלית ומצאו את הסדר שלה.

5.3 זהו את החבורה $G/Z(G)$ עד כדי איזומורפיזם.

6. הגדרה:עבור חבורה G ומספר ראשוני p, נגדיר תת חבורה

$$G^p=<x^p:x\in G>$$

דהיינו, G^p היא תת החבורה הנוצרת ע"י כל האיברים מהצורה x^p ב G. ענו על הסעיפים הבאים.

6.1 יהיו G,H חבורות ו $\varphi : G \to H$ אפימורפיזם. הוכיחו כי G^p מוכלת בתמונה ההפוכה של H^p. דהיינו, כי $G^p \subseteq \varphi^{-1}(H^p)$

6.2 תהי $G \neq 1$ חבורת p סופית. הוכיחו כי $G^p < G$ היא תת חבורה ממש (דהיינו, שונה מ G)
רמז: אינדוקציה על הסדר של G.

בהצלחה! ☺