קורס: 88-231

מרצה: ד"ר שחר נבו

מבחן בפונקציות מרוכבות – מועד א' תשע"ג

- יש לענות על 5 שאלות מתוך 6
- יש לנמק את התשובות
- משך הבחינה 3 שעות

1. א. פתור $z^4+iz^2+2=0$. 11

ב. נסח את משפט קושי-גורסה. 9

2. א. נסח את משפט קזורטי-וירשטראס. 8

ב. מצא את פיתוח לורן של $f(z)=\frac{1}{z}-\frac{1}{z^2}$ ב- $\{|z-1|>1\}$. 12

3. א. ל- f ול- g קוטב מסדר 1 ב- z_0. ל- h קוטב מסדר 2 ב- z_0, ול- r סינגולריות סליקה ב- z_0. 20

מהו סוג הסינגולריות של $\frac{f^2+g}{h+r}$ ב- z_0?

ב. הוכח כי $\left|e^z\right|\le e^{|z|}$ לכל z מרוכב, וכי שוויון מתקיים אם ורק אם z ממשי אי-שלילי. 10

4. א. הוכח את משפט רושה, האומר כי אם f,g אנליטיות על מסילה פשוטה γ ובפנימה, ומתקיים $|f(z)-g(z)|<|g(z)|$ לכל $z\in\gamma$, אז ל- f ול- g אותו מספר אפסים, כולל ריבוב בפנים של γ. 10

ב. כמה אפסים (כולל ריבוב) יש למשוואה $z^3-2z^2+\frac{1}{4}=0$ ב- 10

I) $\frac{1}{4}<|z|<1$?

II) $|z|>1$?

5. חשב $\int_0^{2\pi}\frac{\cos\theta}{2+\sin\theta}d\theta$. 20

6. א. מצא את תמונת $\mathbb{C}\setminus[-2,1]$ תחת ההעתקה $f(z)=\frac{z-1}{z+2}$. 10

ב. מצא את כל הפונקציות השלמות המקיימות $f(f(z))=f(z)$ לכל $z\in\mathbb{C}$. 10

בהצלחה!

פתרון 88231 מועד א' תשס"ט

1 א. $t=z^2$: $t^2+it+2=0$ $\quad t=\frac{-i\pm\sqrt{-1-8}}{2}=\frac{-i\pm 3i}{2}$ $\quad t_{1,2}=i,-2i$

$z^2=i$ $\quad z=\pm e^{i\frac{\pi}{4}}$ $\quad z=\pm\left(\frac{1}{\sqrt2}+\frac{i}{\sqrt2}\right)$. $z^2=-2i=2e^{i\frac32\pi}$

$z=\pm\sqrt2\, e^{i\frac34\pi}=\pm(-1+i)$

ב. נימוק

2 א. נסמן $\frac{1}{z}=\frac{1}{1+z-1}=\frac{1}{z-1}\frac{1}{1+\frac{1}{z-1}}=\frac{1}{z-1}\frac{1}{1-\frac{1}{1-z}}$. $\left|\frac{1}{1-z}\right|<1$ לכן

לכן לפי נוסחה לסכום טור גיאומטרי אינסופי:

$\frac{1}{z}=\frac{1}{z-1}\left[1+\frac{1}{1-z}+\frac{1}{(1-z)^2}+\cdots\right]=-\left[\frac{1}{1-z}+\frac{1}{(1-z)^2}+\frac{1}{(1-z)^3}+\cdots\right]$

$-\frac{1}{z^2}=\left(\frac{1}{z}\right)'\underset{\text{גזירה איבר-איבר}}{=}-\left[\frac{1}{(1-z)^2}+\frac{2}{(1-z)^3}+\frac{3}{(1-z)^4}+\cdots\right]$

ולכן: $\frac{1}{z}-\frac{1}{z^2}=-\left[\frac{1}{1-z}+\frac{2}{(1-z)^2}+\frac{3}{(1-z)^3}+\cdots\right]=\sum_{n=1}^{\infty}n(-1)^{n+1}(z-1)^{-n}$

3 א. ל-f^2 קוטב מסדר 2 ולכן ל-f^2+g קוטב מסדר 2 ל-$h+r$ קוטב מסדר 2 ולכן ל-$\frac{f^2+g}{h+r}$ סינג' סליקה ב-z_0 (וערך הגבול סופי $\neq 0$)

ב. נרשום $z=x+iy$ $\quad |e^z|=e^x\cdot e^{iy}=e^x$ $\quad e^{|z|}=e^{\sqrt{x^2+y^2}}$.

אבל $x\le\sqrt{x^2+y^2}$ נכון אי השוויון. שוויון קורה אם ורק אם $x=\sqrt{x^2+y^2}$ כלומר $y=0$, $x\ge 0$ ו-z ממשי אי שלילי.

4 א. הוכחה. כי על $\{|z|=1\}$: נסמן $p(z)=z^3-2z^2+\frac14$

$\left|z^3-2z^2+\frac14-(-2z^2)\right|=\left|z^3+\frac14\right|\le|z^3|+\frac14=\frac54<2=|-2z^2|$

לכן ב-$\{|z|<1\}$ יש ל-$p(z)$ 2 שורשים. על $\{|z|=\frac14\}$

$\left|z^3-2z^2+\frac14-\frac14\right|=|z^3-2z^2|\le|z^3|+2|z^2|=\frac{1}{64}+\frac18=\frac{9}{64}<\frac14$

ל-$f\equiv\frac14$ אין שורשים לכן לפי משפט רושה אין ל-$p(z)$ שורשים

ב-$\{|z|<\frac14\}$. $p(z)$ פולינום ממעלה 3 לכן יש לו סה"כ 3

שורשים ב-$\mathbb{C}$ ולכן ב-$\{\frac14<|z|<1\}$ יש שני שורשים וב-$\{|z|>1\}$ יש

שורש יחיד.

$\boxed{5}$ הפונקציה אי זוגית סביב $\frac{\pi}{2}$ כלומר $f(\frac{\pi}{2}+x)=-f(\frac{\pi}{2}-x)$ $\left[f(x)=\frac{\cos x}{2+\sin x}\right]$

וכמו כן סביב $\frac{3\pi}{2}$ לכן האינטגרל 0. לפי משפט השארית נקבל

$z=e^{i\theta}$ כי $\int_0^{\pi}=\int_{\pi}^{2\pi}=0$

$d\theta=\frac{dz}{iz}$, $\cos\theta=\frac{z+\frac{1}{z}}{2}$, $\sin\theta=\frac{z-\frac{1}{z}}{2i}$ ונקבל

$$\int_0^{2\pi}\frac{\cos\theta\,d\theta}{2+\sin\theta}=\oint_{|z|=1}\frac{\frac{1}{2}(z+\frac{1}{z})}{2+\frac{z-\frac{1}{z}}{2i}}\frac{dz}{iz}=\dots=\oint_{|z|=1}\frac{z^2+1}{z(z+2i+\sqrt{3}i)(z-(\sqrt{3}-2)i)}dz$$

במעגל היחידה שני קטבים. $z=0$, $z=(\sqrt{3}-2)i$ שניהם

פשוטים. לכן: $Res(D,0)=\frac{1}{-(2i+\sqrt{3}i)(\sqrt{3}-2)i}=\frac{1}{(2+\sqrt{3})(\sqrt{3}-2)}=-1$

$$Res(D,(\sqrt{3}-2)i)=\frac{[(\sqrt{3}-2)i]^2+1}{(\sqrt{3}-2)i[(\sqrt{3}-2)i+i(2+\sqrt{3})]}=\frac{-(2-\sqrt{3})^2+1}{-(\sqrt{3}-2)2\sqrt{3}}=$$

$$=\frac{-(7-4\sqrt{3})+1}{-(6-4\sqrt{3})}=\frac{-6+4\sqrt{3}}{-6+4\sqrt{3}}=1$$

לכן סכום השאריות הוא $-1+1=0$ וזהו גם ערכו של האינטגרל.

$\boxed{6}$ א. f העתקת מביוס המעבירה את $\mathbb{R}$ על $\mathbb{R}$ $f(1)=0$

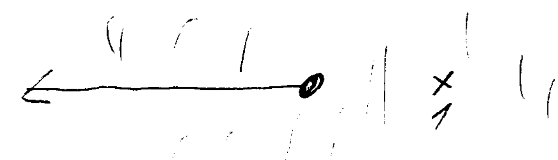
$f(-2)=\infty$. בגלל שהנקודות בין 1 ו- -2, $z=0$ $f(0)=-\frac{1}{2}$ לכן

תמונת הקטע $[-2,1]$ היא $[-\infty,0]$ (ולא $[0,\infty]$ של הממשיים

השלמה). מכאן ש- $f:\hat{\mathbb{C}}\to\hat{\mathbb{C}}$, חד-חד-ערכית ועל ה

כלומר $f(\hat{\mathbb{C}}-[-2,1])=\hat{\mathbb{C}}-[-\infty,0]$ בנוסף $f(\infty)=1$ לכן

$$f(\mathbb{C}-[-2,1])=\mathbb{C}-\{[-\infty,0]\cup\{1\}\}$$



ב. אם f אינה קבועה אז תמונת f $f(\mathbb{C})$ הינה קבוצה פתוחה.

אז לכל $t\in f(\mathbb{C})$ מתקיים $f(t)=t$ ולפי עקרון

היחידות $f(z)=z$. כלומר $f(z)=z$ או f קבועה

* או $\boxed{5}$ אפשר בפשטות כך: $\int_0^{2\pi}\frac{\cos\theta}{2+\sin\theta}d\theta=\ln(2+\sin\theta)\Big|_0^{2\pi}=0$