הרצאה 4 – אינפי 3

גבול לפי Heine

הגדרה

$$f:\Omega\to\mathbb{R}^m$$
$$p\in Lim\Omega$$
$$L:=(H)\lim_{x\to p}f(x)\Leftrightarrow\forall\{x^k\}_{k=1}^{\infty},x^k\in\Omega,x^k\neq p:\lim_{k\to\infty}x^k=p\Rightarrow\lim_{k\to\infty}f(x^k)=L$$

משפט

$$L=\lim_{x\to p}f(x)\Leftrightarrow L=(H)\lim_{x\to p}f(x)$$

הוכחה

נניח כי $L=\lim_{x\to p}f(x)$

ניקח כל סדרה $\{x^k\}_{k=1}^{\infty},x^k\in\Omega,x^k\neq p,\lim_{k\to\infty}x^k=p$. נקבע $\epsilon>0$

$$\exists\delta>0\forall x\in\Omega:0<\left\|x-p\right\|<\delta\Rightarrow\left\|f(x)-L\right\|<\epsilon$$
$$\exists\bar{k}\forall k\geq\bar{k}:\left\|x^k-p\right\|<\delta$$

בנוסף מתקיים $x^k\neq p$, ולפי בחירה של δ מתקיים $\left\|f(x^k)-L\right\|<\epsilon$ מתקיים לכל $k\geq\bar{k}$ ולכן לפי הגדרה של גבול $\lim_{k\to\infty}f(x^k)=L$

נניח כי $L=(H)\lim_{x\to p}f(x)$

נניח $\neg\lim_{x\to p}f(x)=L$

$$\exists\epsilon>0\forall\delta>0\exists x_\delta,x\in\Omega,x\neq p\wedge\left\|f(x)-p\right\|\geq\epsilon$$

$$\forall k\in\mathbb{N}:\delta=\delta_k=\frac{1}{k}$$
$$x_{\delta_k}:=x^k$$
$$x^k\in\Omega,x^k\neq p$$
$$\left\|x^k-p\right\|<\delta_k=\frac{1}{k}$$
$$\left\|f(x^k)-L\right\|\geq\epsilon$$
$$\lim_{k\to\infty}\left\|x^k-p\right\|=0\Rightarrow\lim_{k\to\infty}x^k=p\Rightarrow\left\|f(x^k)-L\right\|\geq\epsilon\Rightarrow\neg(H)\lim_{k\to\infty}f(x^k)$$

תכונות של גבול של פונקציה

$$\lim_{x\to p} f(x) = L, \lim_{x\to p} g(x) = M$$

$$p \in Lim\Omega, f, g\colon \Omega \to \mathbb{R}^m$$

(1 $\exists \lim_{x\to p} \alpha f + \beta g = \alpha L + \beta M$

(2 $\exists \lim_{x\to p} \langle f(x), g(x)\rangle = \langle L, M\rangle$

(3 $m = 1, M \neq 0 \Rightarrow \exists \lim_{x\to p} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{L}{M}$

(4 $\lim_{x\to p} \left|\left|f(x)\right|\right| = \left|\left|L\right|\right|$

למה

$$\left|\left|f(x)\right|\right| \le \alpha(x)$$
$$\lim_{x\to p} \alpha(x) = 0 \Rightarrow \lim_{x\to p} f(x) = 0$$

גבול של פונקצית הרכבה

Superposition

$$\Omega_1 \in \mathbb{R}^n, \Omega_2 \in \mathbb{R}^m, \mathbb{R}^l$$
$$f\colon \Omega_1 \to \Omega_2$$
$$g\colon \Omega_2 \to \mathbb{R}^l$$

$$\forall x \in \Omega_1 : \mathrm{H} \coloneqq \mathrm{g(f(x)}$$
$$h = g \circ f$$

דוגמא

$$h(x,y) = \sin(x^2 + y^2)$$
$$f(x,y) = x^2 + y^2$$
$$g(u) = \sin(u)$$

$$h = g \circ f$$

משפט

תהי $\Omega_1 \in \mathbb{R}^n, \Omega_2 \in \mathbb{R}^m$

$$f\colon \Omega_1 \to \Omega_2$$
$$g; \Omega_2 \to \mathbb{R}^l$$
$$h = g \circ f$$

נניח כי

(1 $\lim_{x\to p} f(x) = q \quad p \in Lim\Omega_1$

(2 $\lim_{x\to q} g(x) = L \quad q \in Lim\Omega_1$

(3 $\exists \epsilon_0 > 0 \forall x \in \Omega_1, x \in B(p, \epsilon_0)$
$x \neq p \Rightarrow f(x) \neq q$

אזי מתקיים

$$\exists \lim_{x\to p} h(x) = L$$

הוכחה

נניח כי $L=(H)\lim_{x\to p}h(x)$

ניקח $\{x^k\}_{k=1}^{\infty}, x^k\in\Omega, x^k\neq p, \lim_{k\to\infty}x^k=p$.

$\lim_{x\to p}f(x)=q$ ולכן $y_k:=f(x^k)\xrightarrow[k\to\infty]{}q$. לפי (3) $f(x^k)\neq q, x^k\in B(q,\epsilon_0)$

$$y_k\neq q, y_k\xrightarrow[k\to\infty]{}q$$

$$L=\lim_{y\to q}g(y)\Rightarrow g(y^k)\to L$$

מה זה $g(y^k)$?

$$g(y^k)=g\big(f(x_k)\big)=h(x_k)$$

ולכן

$$\forall x^k\in\Omega_1, x^k\neq p, x^k\to p: h(x^k)\to L$$

כלומר $L=(H)\lim_{x\to p}f(x)$

דוגמא

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)}\frac{\sin(x^2+y^2)}{x^2+y^2}$$

$$f(x,y)=x^2+y^2, g(u)=\frac{\sin(u)}{u}$$
$$p=(0,0), q=0$$

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)}f=q=0$$
$$\lim_{x\to 0}g(x)=1$$

$$h=g\circ f$$

$$\lim_{x\to p}h(x)=1$$

גבול של צמצום

$$f:\Omega\to\mathbb{R}^m$$
$$\Omega_0\subseteq\Omega$$

$$f|_{\Omega_0}(x)=f(x), x\in\Omega_0$$

משפט

תני $\Omega_0\subseteq\Omega$

$$p\in Lim\Omega_0\subseteq lim\Omega$$

אם $\lim_{\substack{x\to p\\ x\in\Omega}}f(x)=L$ אזי גם קיים הגבול $\lim_{\substack{x\to p\\ x\in\Omega_0}}f|_{\Omega_0}(x)=L$

הוכחה

נקבע $\epsilon>0$

$$\exists\delta\forall x\in\Omega\ : 0<\big||x-p|\big|<\delta\Rightarrow\big||f(x)-L|\big|<\epsilon$$
$$\forall x\in\Omega_0:\ 0<\big||x-p|\big|<\delta\Rightarrow\big||f(x)-L|\big|<\epsilon$$

תוכנית

$$\lim_{\substack{x\to p\\ x\in\Omega}} f(x)$$

1) $p\in Lim\Omega_0, \Omega_0\subseteq\Omega$

$$\nexists \lim_{x\to p} f|_{\Omega_0}(x) \Rightarrow \nexists \lim_{x\to p} f(x)$$

אחרת

2) $\Omega_1\Omega_2\subseteq\Omega$

$$\lim_{x\to p} f|_{\Omega_1}(x) \neq \lim_{x\to p} f|_{\Omega_2}(x) \Rightarrow \nexists \lim_{x\to p} f(x)$$

אחרת

3) $L=\lim_{x\to p} f|_{\Omega_0}$ מועמד לגבול.

דוגמא

1) $f(x,y)=\frac{xy}{x^2+y^2}$

$$\Omega_1 \coloneqq \{(x,o) : x\in\mathbb{R}\}\subseteq\mathbb{R}^2$$
$$\Omega_2 \coloneqq \{(0,y) : y\in\mathbb{R}\}\subseteq\mathbb{R}^2$$
$$f(x,0)=f(0,y)=0$$

אבל

$$\Omega_3=\{(x,x): x\in\mathbb{R}\}\subseteq\mathbb{R}^2$$
$$f(x,x)=\frac{1}{2}$$

ולכן אין גבול.

2) $f(x,y)=\frac{x^2y}{x^4+y^2}, (x,y)\neq(0,0)$

$$p=(0,0), e=(e_1,e_2)$$

צמצום של f אל קו ישר $(x,y)=t(e_1,e_2)$

$$f(te_1,te_2)=\frac{t^2e_1^2te_2}{t^4e_1^4+t^2e_2^2}=\frac{te_1^2e_2}{t^2e_1^4+e_2^2}$$

$$\lim_{t\to0}\frac{te_1^2e_2}{t^2e_1^4+e_2^2}=0 \qquad e_2\neq0$$
$$f(te_1,0)=0 \qquad e_2=0$$
$$\lim_{t\to0} f(te_1,0)=0$$

ניקח $\Omega_0=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 : (x,y)\neq0, y=x^2\}$

$$f(x,x^2)=\frac{1}{2}$$

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,x^2)=\frac{1}{2}$$

ולכן אין גבול.

גבול מחוזרר Iterated limit

$n = 2$

$f(x,y) \qquad (x,y) \to (x_0,y_0)$

גבול מחוזרר:

$$\lim_{y\to y_0}\left(\lim_{x\to x_0} f(x,y)\right)$$

$$\lim_{x\to x_0}\left(\lim_{y\to y_0} f(x,y)\right)$$

דוגמאות

(1

$$f(x,y) = \frac{x^2 - y^2}{x^2 + y^2}, x^2 + y^2 \neq 0$$

$$(x_0,y_0) = (0,0)$$

$$\lim_{x\to 0}\frac{x^2 - y^2}{x^2 + y^2} = -1 \Rightarrow \lim_{y\to y_0}\left(\lim_{x\to x_0} f(x,y)\right) = -1$$

$$\lim_{y\to 0}\frac{x^2 - y^2}{x^2 + y^2} = 1 \Rightarrow \lim_{x\to x_0}\left(\lim_{y\to y_0} f(x,y)\right) = 1$$

$$\exists \lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y)\ ?$$

$$f(x,0) = 1, f(0,y) = -1 \Rightarrow \lim f(x,0) = 1 \neq -1 = \lim f(0,y)$$

ולכן אין גבול

הגבולות המחוזררים שונים ואין גבול לפונקציה עצמה.

(2 $f(x,y) = \frac{x^2y^2}{x^2y^2+(x-y)^2}$

$$\lim_{x\to 0}\left(\lim_{y\to 0} f(x,y)\right) = 0$$

$$\lim_{y\to 0}\left(\lim_{x\to 0} f(x,y)\right) = 0$$

$$f(x,0) = 0 = f(0,y)$$

$$f(x,x) = 1$$

כלומר אין גבול