תרגול 1

1. נתון מרחב מטרי (X,d). הוכיחו שלכל $x,\text{y}\in X$ ו־ $A\subseteq X$ מתקיים

$$d(x,A)\leq d(x,y)+d(y,A)$$

<u>הוכחה</u>: נכתוב את הטענה בפירוט:

$$\inf_{a\in A}d(x,a)\leq d(x,y)+\inf_{b\in A}d(y,b)$$

כדי להוכיח ש־**inf** <u>גדול או שווה</u> ממשהו, צריך להראות את זה לכל איבר עליו הוא רץ.
לכן, יהי A ∋b. נראה ש:

$$\inf_{a\in A}d(x,a)\leq d(x,y)+d(y,b)$$

כדי להוכיח ש־**inf** <u>קטן או שווה</u> ממשהו, מספיק למצוא דוגמה. נבחר a:=b.לפי אי שיוויון המשולש באמת מתקיים:

$$d(x,b)\leq d(x,y)+d(y,b)$$

2. הוכיחו שאיחוד של כמות סופית של קבוצות חסומות הוא חסום.
<u>הוכחה</u>: לפי אינדוקציה, מספיק להראות שהטענה מתקיימת עבור מקרה של שתי קבוצות, כלומר שאם $A,B\subseteq X$ חסומות, אז גם $A\cup B$ חסומה.
אכן, נבחר $a\in A,b\in B$ ונגדיר

$$M:=diam\,A+d(a,b)+diam\,B<\infty.$$

שימו לב שאם אחת הקבוצות ריקה אז הטענה טריוואלית ולכן אפשר להניח שבחירה כזו היא אפשרית.
כעת נרצה להוכיח ש

$$diam(A\cup B):=\sup_{x,y\in A\cup B}d(x,y)\leq M.$$

כדי להוכיח ש־**sup** <u>קטן או שווה</u> למשהו, צריך להראות את זה לכל בחירה של איברים מתאימים.
לכן יהיו $x,y\in A\cup B$. נחלק למקרים.

$$x,y\in A\Rightarrow d(x,y)\leq diam\,A\leq M$$

ובצורה דומה

$$x, y \in B \Rightarrow d(x,y) \leq diam\, B \leq M$$

$$x \in A, y \in B \Rightarrow d(x,y) \leq d(x,a)+d(a,b)+d(b,y) \leq diam\, A+d(a,b)+diam\, B = M$$

ובצורה דומה

$$x \in B, y \in A \Rightarrow d(x,y) \leq d(y,a)+d(a,b)+d(x,y) \leq diam\, A+d(a,b)+diam\, B = M$$

בכל המקרים הוכחנו ש־$diam\, A \cup B \leq M < \infty$.

3. <u>גלגול של קבוצת קנטור:</u> נסמן ב־X את אוסף כל הסדרות האינסופיות שאיבריהן שייכים לקבוצה $\{0, 1, \ldots, n-1\}$. עבור $w = \{w_i\}_{i\in\mathbb{N}}, u = \{u_i\}_{i\in\mathbb{N}}$ נגדיר

$$\kappa(w,u) := \begin{cases} \min_{i\in\mathbb{N}}\{i \in \mathbb{N} \mid w_i \neq u_i\} & w \neq u \\ \infty & w = u \end{cases}$$

ונגדיר את הפו' הבאה $d : X \times X \to [0, \infty)$ ע"י:

$$d(w,u) = \begin{cases} 0 & x = y \\ p^{-\kappa(w,u)} & x \neq y \end{cases}.$$

עבור $p \geq 1$ כלשהו.

(א) הוכיחו כי d היא אולטרה מטריקה על X.
הוכחה: נוכיח רק את אי שיוויון המשולש החזק (כי השאר קל). שימו לב שבמבחן אתם תצטרכו להוכיח את כל התנאים אלא אם יגדירו אחרת!
נרצה להראות שעבור כל $w = \{w_i\}_{i\in\mathbb{N}}, u = \{u_i\}_{i\in\mathbb{N}}, v = \{v_i\}_{i\in\mathbb{N}}$ מתקיים:

$$d(w,v) \leq \max(d(w,u), d(u,v)).$$

נכתוב את זה באופן מפורש ונקבל:

$$p^{-\kappa(w,v)} \leq \max(p^{-\kappa(w,u)}, p^{-\kappa(u,v)})$$

אם צד שמאל הוא 0 אז זה בפירוש נכון. כדי שצד ימין יהיה אפס צריך להתקיים $w = u = v$ שיגרור $d(w,v) = 0$ ויעשה את הטענה נכונה גם כן.
לכן, נניח שאף אחד מהצדדים אינו 0 וניקח $\log_p$ של שני הצדדים. שימו לב שזו פונקציה מונוטונית עולה ולכן אי השיוויון ופעולת ה־$\max$ נשמרת:

$$-\kappa(w,v) \leq \max(-\kappa(w,u), -\kappa(u,v))$$

נכפיל ב־-1 ונקבל

$$k(w,v) \geq \min(k(w,u), k(u,v))$$

בשלילה, נניח שזה לא נכון, כלומר

$$k(w,v) < \min(k(w,u), k(u,v))$$

נסמן i:=$\kappa(w,v)$. לפי ההגדרה של κ, מתקיים $w_i = u_i$ וגם $u_i = v_i$. באופן זה נסיק ש־$w_i = v_i$. עם זאת, זה לא הגיוני עם ההגדרה של i ־ סתירה.
הערה: כאשר $n = 2$, כלומר הסדרות מקבלות ערכים בינארים, אז X נקרא מרחב קנטור ויסומן כ־C. נתמקד רק בו מעכשיו. לצורכי התרגיל הבא, נסמן גם C_n עבור $n \neq 2$.

(ב) חשבו את המרחק בין הסדרה $x_i := i \ (mod\ 2)$ והסדרה $y_i := 0$
פתרון: אם אנחנו מתחילים לספור מ־0 אז די ברור ש־$x_0 = y_0 = 0$ אבל $x_1 \neq y_1$ ולכן $d(\{x_i\}_{i\in\mathbb{N}}, \{y_i\}_{i\in\mathbb{N}}) = p^{-1}$.

(ג) נגדיר את הקבוצה

$$A := \{\{x_i\}_{i\in\mathbb{N}} \in C \mid \limsup_{i\in\mathbb{N}} \frac{1}{i+1} \sum_{j=0}^{i} x_i > 0\}$$

חשב את המרחק של הקבוצה הזו מ־$\{y_i\}$ שהוגדרה קודם לכן.
פתרון: נגדיר את הסדרות

$$H_i^j := \begin{cases} 0 & i < j \\ 1 & i \geq j \end{cases}$$

קל לראות שלכל $j \in \mathbb{N}$ מתקיים $\{H_i^j\}_{i\in\mathbb{N}} \in A$. בנוסף, אפשר גם לראות בקלות ש־

$$d(\{y_i\}_{i\in\mathbb{N}}, \{H_i^j\}_{i\in\mathbb{N}}) = p^{-j}.$$

זה נכון לכל $j \in \mathbb{N}$ ולכן

$$0 \leq d(\{y_i\}_{i\in\mathbb{N}}, A) \leq \inf_{j\in\mathbb{N}} d(\{y_i\}_{i\in\mathbb{N}}, \{H_i^j\}_{i\in\mathbb{N}}) \leq \inf_{j\in\mathbb{N}} p^{-j} = 0,$$

בעצם הראנו ש־$d(\{y_i\}_{i\in\mathbb{N}}, A) = 0$.

(ד) אתגר: הוכיחו שאף נקודה במרחב קנטור אינה מבודדת. רמז: אפשר להעזר במשפט מההרצאה.

4. הגדרנו בכיתה את המטריקה ה־p ־ אדית באופן הבא: עבור $p \in \mathbb{N}$ ראשוני, מגדירים $k(x,y) = \max\{i : p^i | (x-y)\}$ ו־

$$d_p(x,y) = \begin{cases} 0 & x = y \\ \dfrac{1}{p^{k(x,y)}} & x \neq y \end{cases}$$

הוכיחו שזו אכן אולטרה־מטריקה. עשו זאת ישירות וגם באמצעות התרגיל הקודם.
הוכחה ישירה: נוכיח רק את אי־שיוויון המשולש החזק. יהיו $a,b,c \in \mathbb{Z}$. נראה ש־

$$d_p(a,c) \leq \max(d_p(a,b), d_p(b,c)).$$

כמו בתרגיל הקודם, אפשר להניח שאף אחד מהאגפים אינו 0.
נרשום את הנוסחה במפורש:

$$p^{-\kappa(a,c)} \leq \max(p^{-\kappa(a,b)}, p^{-\kappa(b,c)}).$$

כעת נפעיל את אותו הטריק של $\log_p$ וההכפלה ב־-1 ונקבל

$$\kappa(a,c) \geq \min(\kappa(a,b),\kappa(b,c)) := i$$

אז לפי הגדרה מתקיים $p^i \mid a-b$ וגם $p^i \mid b-c$. לכן $p^i \mid (a-b+b-c)$, כלומר $p^i \mid a-c$. לפי הגדרה מתקיים $i \leq \kappa(a,c)$, כמו שרצינו.

<u>הוכחה באמצעות התרגיל הקודם:</u>

נגדיר פונקציה $\varphi : \mathbb{Z} \to C_p$ על ידי שליחת כל מספר ליצוג שלו בבסיס p בסדר הפוך.
לדוגמה במקרה של $z=6$ ו־$p=2$ נקבל ש־$\varphi(z)=011$.
באופן פורמלי, אפשר להציג כל טבעי באופן יחיד כ־$z=\pm\sum_{i=0}^{k} a_i p^i$ כאשר $a_i \in \{0,1,\dots,p-1\}$. נגדיר את φ על ידי

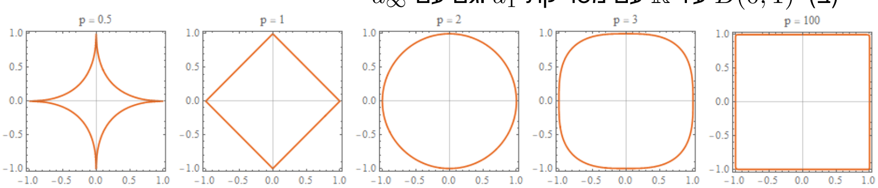
$$\varphi(z) := \begin{cases} a_0a_1\dots a_k000\dots & z \geq 0 \\ a_0a_1\dots a_k(p-1)(p-1)(p-1)\dots & z<0 \end{cases}$$

קל לראות (תשלימו בעצמכם) שזה שיכון איזומטרי בין $\mathbb{Z}$ ו־C_n שכבר ראינו שהוא אולטרה־מטרי, ולכן כך גם $(\mathbb{Z},d_p)$.

5. מצאו את הכדורים הבאים

(א) כדור פתוח בקוטר $\frac{\pi}{2}$ על ספרה ברדיוס 1 ־ בעצם זו בדיוק המיספרה.

(ב) $B(0,1)$ על $\mathbb{R}$ עם מטריקת d_1 וגם עם d_∞



(ג) $B_{d_3}(0,\frac{2}{5})$ במרחב $(\mathbb{Z},d_3)$ ־

$$z \in B(0,\frac{2}{5}) \iff d(0,z) \leq \frac{2}{5} \iff k(0,z) \geq 1 \iff 3^1 \mid z$$

כלומר, $B(0,\frac{2}{5}) = 3\mathbb{Z}$.

(ד) אתגר: סווגו את כל הכדורים במרחב ה־p־אדי.

6. למרחב מטרי, הוכיחו או הפריכו את הדברים הבאים:

(א) $r_1 > r_2 \Rightarrow B(x,r_1) \supseteq B(x,r_2)$ ־ הוכחה: $y \in B(x,r_2) \iff d(x,y) < r_2 \Rightarrow d(x,y) < r_1 \iff y \in B(x,r_1)$

(ב) $r_1 > r_2 \Leftarrow B(x,r_1) \supseteq B(x,r_2)$ ־ הפרכה: במרחב דיסקרטי $B(x,1) = B(x,2)$

(ג) $r_1 > r_2 \Leftarrow B(x,r_1) \supseteq B(y,r_2)$ הפרכה: $X=[0,1]$, $y=0, x=\frac{1}{4}, r_1=\frac{1}{3}, r_2=\frac{1}{2}$.

7. הוכיחו שבאולטרמטריקה, כל נקודה בתוך כדור היא המרכז שלו

<u>הוכחה:</u>
נניח ש־X $x \in$, $r \in \mathbb{R}^+$ ו־$y \in B(x,r)$. נראה ש־$B(x,r) = B(y,r)$. נניח ש־$z \in B(y,r)$ נראה ש־$z \in B(x,r)$. לפי אי שיוויון המשולש החזק:

$$d(x,z) \leq \max d(x,y), d(y,z) \leq r$$

לפי הגדרה, z$\in B(x,r)$. ההכלה השניה דומה.

8. על כל אחת מהסדרות הבאות קבעו אם היא מתכנסת ולאן במטריקה ה־p־אדית

(א) p^n ־ כן, מתכנסת ל־0

(ב) a^n ־ מתכנס רק אם $p \mid a$, ובמקרה זה ההתכנסות היא ל־0.

(ג) $n!$ ־ מתכנס ל־0

(ד) $\sum_{i=0}^{n} p^i$ ־ מתכנס ל־$\frac{1}{1-p}$. שימו לב שרק אם $p = 2$ הגבול הזה קיים בשלמים.

9. מצאו סדרה ב־l_∞ שמתכנסת בכל רכיב אבל לא במטריקה של המרחב

<u>תשובה:</u> נגדיר $\delta_i^j := \begin{cases} 1 & i = j \\ 0 & i \neq j \end{cases}$ ונגדיר $\delta^j := \{\delta_i^j\}_{i \in \mathbb{N}}$. קל לראות שהסדרה הזו שואפת ל־0 בכל איבר אבל לא במטריקה של l_∞.

10. האם שיכון איזומטרי בין מרחב לעצמו הוא בהכרח על (כלומר איזומטריה)?

<u>תשובה:</u> לא, אפשר לדוגמה לקחת את $X = [0, \infty)$ ואת $f : X \to X$ שמוגדרת ע"י $f(x) := x + 1$.
אפשר גם לתת דוגמה של קבוצה חסומה עם שיכון איזומטרי עצמי שאינו איזומטריה.
נסתכל על כדור היחידה B של (l_∞, d_∞), ונגדיר $f : B \to B$ ע"י

$$f((x_0, x_1, \dots)) := (0, x_0, x_1, \dots)$$

כלומר פונקציית ההזזה ברכיב אחד. קל לראות שזו איזומטריה, אבל היא בבירור לא על (התמונה שלה לא כוללת את האיבר הראשון של הבסיס הסטנדרטי $e_1 \in l_\infty$).

(א) אתגר: האם תשובתך תשתנה אם נסתכל רק על קבוצות חסומות ב־$\mathbb{R}^n$ עם המטריקה האוקלידית?