(88132) חשבון אינפיניטסימלי 1 | מבחן תשע"ט מועד ב'

הצעת פתרון | לירן מנצורי ויונתן סמידוברסקי

שאלה 1

הוכח:

א. כל סידרה יורדת וחסומה מלרע, מתכנסת.

ב. סידרה מונוטונית היא מתכנסת (במובן הצר) אם ורק אם יש לה תת־סידרה מתכנסת.

(בסעיף א, אין להשתמש במשפט שכל סידרה מונוטונית וחסומה מתכנסת. בסעיף ב, מותר להשתמש בכל מה שנלמד בקורס.)

(א)

תהי (a_n) יורדת וחסומה מלרע, נגדיר $f := inf\{a_n | n \in \mathbb{N}\}$

יהי $\epsilon > 0$ נמצא N כך שלכל $n \geq N$ מתקיים $|a_n - a| < \epsilon$, נבחר את $a := f$.

אבל קיים N' כך ש$f < a_N \leq f + \epsilon$ ולכל $n \geq N := N'$ מתקיים

$$f < a_n \leq a_N < f + \epsilon$$

כלומר $|a_n - f| < \epsilon$

(ב)

$\Leftarrow$: מתכנסת, בפרט יש לה ת"ס, היא עצמה, מתכנסת.

$\Rightarrow$: נניח כי יש לa_n מונוטונית, ת"ס מתכנסת.

לפי משפט, כל סדרה מונוטונית, מתכנסת במובן הרחב לאיזשהו $L \in \mathbb{R} \cup \{-\infty, \infty\}$

כעת, בפרט כל ת"ס שלה מתכנסת לL, אבל קיימת ת"ס מתכנסת במובן הצר, כלומר $L \in \mathbb{R}$ וסיימנו.

שאלה 2

נגדיר סידרה.

$$a_n = \frac{1}{n^2} \cdot \sum_{k=1}^{n} [kx].$$

לכל x ממשי, מצא את גבול הסידרה.

(עבור מספר ממשי a, $[a] := \max\{k \in \mathbb{Z} : k \leq a\}$ הוא הערך השלם של a.)

$$\frac{1}{n^2}\sum_{k=1}^{n}(k-1)x \leq a_n \leq \frac{1}{n^2}\sum_{k=1}^{n}kx$$

כעת, הגבול השמאלי הוא

$$\frac{1}{n^2}\sum_{k=1}^{n}kx = \frac{1}{n^2}\frac{(x+nx)\cdot n}{2} = \frac{x+nx}{2n} = \frac{x}{2n} + \frac{x}{2} \to_{n\to\infty} \frac{x}{2}$$

ומצד שני

$$\frac{1}{n^2}\sum_{k=1}^{n}(k-1)x = \frac{1}{n^2}\frac{[x+(n-1)x]\cdot n}{2} = \frac{xn}{2n} = \frac{x}{2} \to \frac{x}{2}$$

ומסנדוויץ, סיימנו. לכל $x \in \mathbb{R}$ הגבול הוא $\frac{x}{2}$.

שאלה 3

יהיו $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ ו $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ טורים, ונתון שיש מספר טבעי n_0כך שלכל $n_0 \le n$ מתקיימים שני האי־שיוויונים הבאים:

$$0 < a_n, b_n$$
$$\frac{a_{n+1}}{a_n} \le \frac{b_{n+1}}{b_n}.$$

הוכח שאם $\sum_{n=1}^{\infty} b_n < \infty$, אז גם $\sum_{n=1}^{\infty} a_n < \infty$.

נניח $\sum_{n=1}^{\infty} b_n < \infty$,

נשים לב ש$\frac{a_{n+1}}{a_n} \le \frac{b_{n+1}}{b_n} \Longleftarrow \frac{a_{n+1}}{b_{n+1}} \le \frac{a_n}{b_n}$, קיבלנו שהסדרה $(\frac{a_n}{b_n})_{n=1}^{\infty}$ יורדת, היא חסומה

(כי שניהם גדולים מאפס- חסם מלרע, וחסם מלעיל הוא האיבר הראשון)

לכן $\frac{a_n}{b_n}$ מתכנסת, נסמן $\frac{a_n}{b_n} \to L_1$, ממבחן ההשוואה הגבולי, הטורים מתכנסים ומתבדרים יחדיו ולכן

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n < \infty$$

שאלה 4

נקודה c בתחום של פונקציה f נקראת **נקודת שבת** אם $c = f(c)$.

א. הוכח שלכל פונקציה רציפה $f: [0,1] \to [0,1]$ יש נקודת שבת.

ב. מצא פונקציה רציפה $f: (0,1] \to (0,1]$ ללא נקודת שבת.

ג. מצא פונקציה (לא רציפה) $f: [0,1] \to [0,1]$ ללא נקודת שבת.

(א)

נסתכל על $g(x) := f(x) - x$, נראה שקיימת נקודה בה $g(x) = 0$.
נשים לב כי $g(0) = f(0), g(1) = f(1) - 1$
כלומר $0 \le g(0) \le 1$ וכן $g(1) \le 0$,
אם $g(0) = 0$ או $g(1) = 0$, סיימנו.
אחרת $g(0) \neq 0, g(1) \neq 1$ אבל ממשפט ערך הביניים הפונקציה $g(x)$ מקבלת את הערך 0 בתחום
משום ש $g(1) < 0, g(0) > 0$ וסיימנו.

(ב)

ניקח את $f(x) := 0.5x$
(לא ניתן לקחת פונקציה על כי אז יהיה חייב להיות לה חיתוך עם $y = x$)

(ג)

ניקח למשל את
$$f(x) := \begin{cases} 1 & x = 0 \\ 0 & x = 1 \\ 2x & else \end{cases}$$

שאלה 5

הוכח או הפרך כל אחת מהטענות הבאות:

א. הפונקציה $f(x) := \begin{cases} x & x \le 0 \\ x+1 & 0 < x \end{cases}$ גזירה בכל הישר הממשי.

ב. הפונקציה $f(x) := |x^3|$ גזירה בכל הישר הממשי.

ג. הפונקציה $f(x) := \begin{cases} x^2 & x \in \mathbb{Q} \\ -x^2 & x \notin \mathbb{Q} \end{cases}$ אינה גזירה באף נקודה.

(א)

הוכחה היא גזירה לכל $x \neq 0$, נראה מה קורה ב$x = 0$

גזירה כלומר הגבול $lim_{h\to 0}\frac{f(0+h)-f(0)}{h}$ קיים, נמצא גבולות מימין ומשמאל

$$lim_{h\to 0^+}\frac{f(0+h)-f(0)}{h} = lim_{h\to 0^+}\frac{h+1-0}{h} = lim_{h\to 0^+}1+\frac{1}{h} = \infty$$

לא גזירה באפס, כי הגבול מצד ימין לא קיים ולכן סיימנו.

(ב)

הוכחה ב$x > 0$ או $x < 0$ מדובר בפונקציות x^3 או $-x^3$, אשר גזירות.

נבדוק את הגבולות מימין ומשמאל ב

$$lim_{h\to 0^+}\frac{f(0+h)-f(0)}{h} = lim_{h\to 0^+}\frac{h^3-0}{h} = lim_{h\to 0^+}h^2 = 0$$

$$lim_{h\to 0^-}\frac{f(0+h)-f(0)}{h} = lim_{h\to 0^-}\frac{-h^3-0}{h} = lim_{h\to 0^-}-h^2 = 0$$

ולכן הפונקציה גזירה בכל הישר הממשי.

(ג)

<u>הפרכה</u>

נראה שגזירה ב-0 כלומר

$$lim_{h\to 0}\frac{f(0+h)-f(0)}{h}$$

קיים,

מהגדרת הגבול נסתכל על $h_n\to 0$ ונחלק למקרים

- אם יש כמות סופית של רציונאליים בסדרה ואינסופית של אי רציונאליים, נסתכל על זנב הסדרה ונקבל

$$\frac{f(0+h_n)-f(0)}{h_n}=\frac{-h_n^2}{h_n}=-h_n\to 0$$

- אם יש כמות סופית של אי- רציונאליים בסדרה ואינסופית של רציונאליים, נסתכל על הזנב ונקבל

$$\frac{f(0+h_n)-f(0)}{h_n}=\frac{h_n^2}{h_n}=h_n\to 0$$

- אחרת, אינסוף איברים מכל אחת מהקבוצות, מפצלים לשתי תתי- סדרות המתכנסות לאותו גבול וסיימנו.