

Example 11

1) $\frac{dy}{dx}$ of $y = u^2v - \sqrt{uv}$

2) $y = u^2v - \sqrt{uv}$ (k)

$$\begin{aligned} \frac{dy}{dx} &= \frac{d(u^2v)}{dx} - \frac{d(\sqrt{uv})}{dx} = \\ &= 2u \cdot \frac{du}{dx} \cdot v + u^2 \frac{dv}{dx} - \frac{1}{2\sqrt{uv}} \frac{d(uv)}{dx} = \\ &= 2u \cdot \frac{du}{dx} \cdot v + u^2 \frac{dv}{dx} - \frac{1}{2\sqrt{uv}} \left(\frac{du}{dx} \cdot v + \frac{dv}{dx} \cdot u \right) = \\ &= 2uv \frac{du}{dx} + u^2 \frac{dv}{dx} - \frac{v}{2\sqrt{uv}} \frac{du}{dx} - \frac{u}{2\sqrt{uv}} \frac{dv}{dx} = \end{aligned}$$

3) $y = \frac{1}{u^2v}$ (l)

$$\begin{aligned} \frac{dy}{dx} &= \frac{d\left(\frac{1}{u^2v}\right)}{dx} = \frac{d(u^{-2}v^{-1})}{dx} = \\ &= -1(u^{-2}v)^{-2} \frac{d(u^2v)}{dx} = \frac{-1}{(u^2v)^2} \left[\frac{du}{dx} 2u + \frac{dv}{dx} \right] \\ &= \frac{-2u}{(u^2v)^2} \frac{du}{dx} - \frac{1}{(u^2v)^2} \frac{dv}{dx} \end{aligned}$$

2. (2) $\sin(x^2-7) \tan(2x^2+5)$ (10)

$$f(x) = 3(x^2-1)(2x^2-1)(2x+3) \quad (10)$$

11/10

$$\frac{dF}{dx} = \frac{d(3(x^2-1)(2x^2-1))}{dx} \cdot (2x+3) + 3(x^2-1)(2x^2-1) \frac{d(2x+3)}{dx}$$

$$= [3 \cdot 2x(2x^2-1) + 3(x^2-1) \cdot 4x] \cdot (2x+3)$$

$$+ 3(x^2-1)(2x^2-1) \cdot 2$$

$$= 6x(2x^2-1)(2x+3) + 12x(x^2-1)(2x+3) + 6(x^2-1)(2x^2-1)$$

$$f(x) = \sin\left(\frac{12x^3 - x^2 + 2x - 1}{3x^4 - 1}\right) \quad (10)$$

$$\frac{dF}{dx} = \cos\left(\frac{12x^3 - x^2 + 2x - 1}{3x^4 - 1}\right) \cdot \left(\frac{12x^3 - x^2 + 2x - 1}{3x^4 - 1}\right)'$$

$$= \cos\left(\frac{12x^3 - x^2 + 2x - 1}{3x^4 - 1}\right) \cdot \frac{(36x^2 - 2x + 2)(3x^4 - 1) - 12x^3(12x - x^2 + 2x - 1)}{(3x^4 - 1)^2}$$

$$f(x) = (\sin(x^2-7) \tan(2x^2+5))^{10} \quad (10)$$

$$\frac{dF}{dx} = 10 (\sin(x^2-7) \tan(2x^2+5))^9 (\sin(x^2-7) \tan(2x^2+5))'$$

$$= 10 (\sinh(x^2-7) + \tanh(2x+5)) \left(\cos(x^2-7) \cdot 2x - \frac{2}{\cos^2(2x+5)} \right)$$

$$F(x) = \ln \left(\ln \left(\frac{3x-12}{x^2+1} \right) \right) \quad (9)$$

$$\frac{dF}{dx} = \frac{1}{\ln \left(\frac{3x-12}{x^2+1} \right)} \cdot \left(\ln \left(\frac{3x-12}{x^2+1} \right) \right)' =$$

$$= \frac{1}{\ln \left(\frac{3x-12}{x^2+1} \right)} \left[\frac{1}{\frac{3x-12}{x^2+1}} \cdot \left(\frac{3x-12}{x^2+1} \right)' \right] =$$

$$= \frac{1}{\ln \left(\frac{3x-12}{x^2+1} \right)} \left[\frac{x^2+1}{3x-12} \cdot \left(\frac{3(x^2+1) - 2x(3x-12)}{(x^2+1)^2} \right) \right]$$

$$F(x) = e^{x^3 \cos x} \quad (1)$$

$$\frac{dF}{dx} = e^{x^3 \cos x} \cdot (x^3 \cos x)' = e^{x^3 \cos x} (3x^2 \cos x + x^3 (-\sin x))$$

$$= e^{x^3 \cos x} (3x^2 \cos x - x^3 \sin x)$$

$$F(x) = \tan\left(7x \pm \sqrt{x^2 - 5x - 2}\right) \quad (1)$$

$$\frac{dF}{dx} = \frac{1}{\cos^2\left(7x \pm \sqrt{x^2 - 5x - 2}\right)} \cdot \left(7x \pm \sqrt{x^2 - 5x - 2}\right)' =$$

$$= \frac{1}{\cos^2\left(7x \pm \sqrt{x^2 - 5x - 2}\right)} \cdot \left[7 \pm \frac{1}{3}(x^2 - 5x - 2)^{-\frac{2}{3}} \cdot (2x - 5)\right]$$

$$= \frac{1}{\cos^2\left(7x \pm \sqrt{x^2 - 5x - 2}\right)} \cdot \left(7 \pm \frac{(2x - 5)}{3\sqrt{(x^2 - 5x - 2)^2}}\right)$$

$$F(x) = \sqrt[5]{4x^3 - 5} \quad (2)$$

$$\frac{dF}{dx} = \frac{1}{5}(4x^3 - 5)^{-\frac{4}{5}} \cdot 12x^2 = \frac{12x^2}{5\sqrt[5]{(4x^3 - 5)^4}}$$

$$F(x) = \ln\left(\sinh\left(\frac{x}{x^2 + 2x + 3}\right)\right) \quad (3)$$

$$\frac{dF}{dx} = \frac{1}{\sinh\left(\frac{x}{x^2 + 2x + 3}\right)} \cdot \left[\sinh\left(\frac{x}{x^2 + 2x + 3}\right)\right]' =$$

$$= \frac{1}{\sinh\left(\frac{x}{x^2 + 2x + 3}\right)} \cdot \left[\cosh\left(\frac{x}{x^2 + 2x + 3}\right) \cdot \left(\frac{x}{x^2 + 2x + 3}\right)'\right]$$

$$= \frac{1}{\sinh\left(\frac{x}{x^2+2x+3}\right)} \cdot \left[\cos\left(\frac{x}{x^2+2x+3}\right) \cdot \left(\frac{(x^2+2x+3) - (2x+2)x}{(x^2+2x+3)^2} \right) \right]$$

$$= \frac{1}{\sinh\left(\frac{x}{x^2+2x+3}\right)} \cdot \left[\cos\left(\frac{x}{x^2+2x+3}\right) \cdot \left(\frac{-x^2+2x+3-2x^2-2x}{(x^2+2x+3)^2} \right) \right] =$$

$$= \frac{1}{\sinh\left(\frac{x}{x^2+2x+3}\right)} \cdot \left[\cos\left(\frac{x}{x^2+2x+3}\right) \cdot \left(\frac{-x^2+3}{(x^2+2x+3)^2} \right) \right]$$

سوال 113 (3)

$$F(x) = (2x+5)^{-x+4}$$

(1)

حل

$$\ln F(x) = \ln (2x+5)^{-x+4}$$

$$\ln F(x) = (-x+4) \ln (2x+5)$$

$$\frac{F'(x)}{F(x)} = -\ln(2x+5) + (-x+4) \cdot \frac{1}{2x+5}$$

$$\frac{F'(x)}{F(x)} = -\ln(2x+5) + \frac{-x+4}{2x+5}$$

$$F'(x) = -F(x) \ln(2x+5) + F(x) \cdot \left(\frac{-x+4}{2x+5} \right)$$

$$F'(x) = (2x+5)^{-x+4} \left(-\ln(2x+5) + \frac{-x+4}{2x+5} \right)$$

$$F(x) = (\cos x)^{\sin x}$$

(2)

$$\ln F(x) = \ln (\cos x)^{\sin x}$$

حل

$$\ln F(x) = \sin x \ln(\cos x)$$

$$\frac{F'(x)}{F(x)} = \cos x \cdot \ln(\cos x) + \sin x \cdot \frac{-\sin x}{\cos x}$$

$$F'(x) = (\cos x)^{\sin x} \left(\cos x \cdot \ln(\cos x) - \frac{\sin^2 x}{\cos x} \right)$$

$$F(x) = \sin(x^{\cos x})$$

پہلے

$$F'(x) = \cos(x^{\cos x}) \cdot (x^{\cos x})'$$

$$(x^{\cos x})'$$

پہلے

$$y = x^{\cos x}$$

$$\ln y = \ln x^{\cos x}$$

$$\ln y = \cos x \cdot \ln x$$

$$\frac{y'}{y} = -\sin x \cdot \ln x + \frac{\cos x}{x}$$

, پہلے سے

$$F'(x) = \cos(x^{\cos x}) \left[x^{\cos x} \left(-\sin x \cdot \ln x + \frac{\cos x}{x} \right) \right]$$

$\frac{dy}{dx}$ (4) הנקרא את הבינומית (הנוכחית) ונחשב את הנגזרת
 כפונקציה המושגת של x .

(א) $y \geq -\frac{3}{2}$
 $x = y^2 + 3y - 1$
 במניין

נבדוק את הנשואים ברום $y - \sqrt{\dots}$

$$y^2 + 3y - 1 - x = 0$$

$$y_1 = \frac{-3 \pm \sqrt{9 \pm 4(1-x)}}{2} = \frac{-3 \pm \sqrt{13 \pm 4x}}{2} \geq -\frac{3}{2}$$

שורש הנשואים
 שלילי $y_2 = \frac{-3 - \sqrt{9 \pm 4(1-x)}}{2} = \frac{-3 - \sqrt{13 \pm 4x}}{2} \leq -\frac{3}{2}$

שם הבינומית (הנוכחית) (היא)

$$y = -\frac{3}{2} \pm \frac{\sqrt{13 \pm 4x}}{2}$$

שם הנשואים הנשואים:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{\frac{dx}{dy}} = \frac{1}{2y + 3} = \frac{1}{2\left(-\frac{3}{2} \pm \frac{\sqrt{13 \pm 4x}}{2}\right) + 3}$$

$$= \frac{1}{\sqrt{13 \pm 4x}}$$

$$x = y^4 + y^2 - 1$$

$y \geq 0$ (ב)

נבדוק את הנשואים של y

$$y^4 + y^2 - 1 - x = 0$$

$$t = y^2 \text{ נוסף}$$

$$t^2 - t + 1 - x = 0$$

$$t_1 = \frac{-1 \pm \sqrt{1 - 4(1-x)}}{2} = \frac{-1 \pm \sqrt{4x-3}}{2}$$

$$x = y^4 - y^2 + 1 \geq 1 \text{ כל } y \geq 0 \text{ אלא נוסף}$$

$$t_1 \geq 0 \text{ נוסף}$$

$$t_2 = \frac{-1 - \sqrt{4x-3}}{2} < 0 \text{ אלא נוסף}$$

$$y^2 = \frac{-1 \pm \sqrt{4x-3}}{2} \Leftrightarrow t = \frac{-1 \pm \sqrt{4x-3}}{2} \text{ נוסף}$$

$$y = \sqrt{\frac{-1 \pm \sqrt{4x-3}}{2}} \text{ (א) } y \geq 0 \text{ אלא נוסף}$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{\frac{dx}{dy}} = \frac{1}{4y^3 + 2y} = \frac{1}{4\left(\frac{-1 \pm \sqrt{4x-3}}{2}\right)^2 \pm \sqrt{\frac{-1 \pm \sqrt{4x-3}}{2}}}$$

$$y = 2 - \frac{1}{\sqrt{x^2}} = 2 - x^{-\frac{2}{3}} \quad (5)$$

$$\frac{dx}{dy} = \frac{1}{\frac{dy}{dx}} = \frac{1}{-\frac{2}{3}x^{-\frac{2}{3}}} = -\frac{3}{2}x^{\frac{2}{3}} \text{ נוסף}$$

יג נוסף אלא נוסף

$$\frac{1}{\sqrt{x^2}} = y - 2 \Leftrightarrow \frac{1}{y-2} = \sqrt{x^2}$$

$$x = \frac{1}{(y-2)^{\frac{3}{2}}}$$

נציג את הקשר

$$\frac{dx}{dy} = -\frac{3}{2} \left(\frac{1}{(y-2)^{\frac{3}{2}}} \right)^{\frac{2}{3}}$$

$$\boxed{\frac{dx}{dy} = -\frac{3}{2} \frac{1}{(y-2)^{\frac{3}{2}}}}$$

(6) נותנו את הנגזרת

(א) הפונקציה $F(x) = x^2$ הנגזרת היא $2x$

הפונקציה $F(x) = x^2$ היא הפונקציה ההיפוטנטיקה, $F(1) = F(-1) = 1$

(ב) אם F היא הפונקציה ההיפוטנטיקה $F(x) = x^2$ אז $F^{-1}(x) = \sqrt{x}$ עבור $x \geq 0$

לוקח $F(x) = x^2$ עבור $x \geq 0$
 ההיפוטנטיקה $F^{-1}(x) = \sqrt{x}$

F היא הפונקציה ההיפוטנטיקה $F(x) = x^2$ עבור $x \geq 0$
 הנגזרת היא $F^{-1}(x) = \sqrt{x}$

(ג) נניח $F(x) = x^2$ הפונקציה ההיפוטנטיקה $F^{-1}(x) = \sqrt{x}$

הנגזרת היא $F(x) = x^2$ עבור $x \geq 0$

$$\delta t \left(\frac{F(\Delta x) - F(0)}{\Delta x} \right) = \delta t \left(\frac{\Delta x^{\frac{1}{2}}}{\Delta x} \right) = \delta t \left(\frac{1}{\Delta x^{\frac{1}{2}}} \right)$$

אם $\Delta x \neq 0$ אז הנגזרת היא $\frac{1}{2\sqrt{x}}$