תרגול 10 אינפי 3

19 בינואר 2015

משפט הפונקציה הסתומה ב־n משתנים:

תהי משוואה $F(x_1, x_2 \ldots, x_n, y) = 0$ כאשר F פונקציה של $n+1$ משתנים המוגדרת בסביבה D של הנקודה $A = (x_1^0, x_2^0 \ldots, x_n^0, y^0)$.

נניח שמתקיים $F(A) = 0$ ובנוסף $F \in C^1$ וגם $F_y(A) \neq 0$ אז קיימת תיבה n מימדית $\left|x_i - x_i^0\right| < \delta_i$ כך שהמשוואה מגדירה בסביבה זו את y כפונקציה סתומה של שאר המשתנים:

$$y = y(x_1, x_2 \ldots x_n)$$

בנוסף, y גזירה ברציפות לפי כל אחד מהמשתנים ומתקיים:

$$\frac{\partial y}{\partial x_i} = -\frac{F_{x_i}}{F_y}$$

<u>תרגיל:</u>

נתונה המשוואה:

$$y^3 + xz + y^2 + e^z - 3 = 0$$

הוכיחו כי המשוואה מגדירה פונקציה $z = z(x, y)$ בסביבת הנקודה $(1, 1, 0)$.

<u>פתרון:</u>

נגדיר:

$$F(x, y, z) = y^3 + xz + y^2 + e^z - 3$$

הפונקציה הנ"ל היא סכום של פונקציות אלמנטריות לפי שלושת המשתנים ולכן $F \in C^1(\mathbb{R}^3)$.

אכן מתקיים: $F(1,1,0)=0$, וכן:

$$F_z(1,1,0) = x + e^z|_{(1,1,0)} = 2 \neq 0$$

ולכן תנאי המשפט מתקיימים, והמשוואה אכן מגדירה פונקציה סתומה $z = z(x,y)$ בסביבת הנקודה $(1,1,)$.

<u>תרגיל:</u>

בהמשך לתרגיל הקודם, חשבו את $\frac{\partial z}{\partial x}, \frac{\partial z}{\partial y}$ ישירותת לפי כלל השרשרת.

<u>פתרון:</u>

נתבונן במשוואה המקורית: $y^3 + x \cdot z(x,y) + y^2 + e^{z(x,y)} - 3 = 0$, נגזור אותה לפי x ונקבל:

$$z(x,y) + x \cdot z_x(x,y) + z_x(x,y) \cdot e^{z(x,y)} = 0$$

כלומר:

$$z_x = -\frac{z}{x+e^z}$$

באופן דומה נגזור את המשוואה לפי y ונקבל:

$$z_y = -\frac{3y^2+2y}{x+e^z}$$

<u>תרגיל:</u>

תהי $F(x,y,z) \in C^1(\mathbb{R}^3)$, ונניח כי בסביבה D של נקודה (x_0,y_0,z_0) המשוואה מגדירה 3 פונקציות:

$$x = x(y,z), y = y(x,z), z = z(x,y)$$

חשבו את: $\frac{\partial x}{\partial y} \cdot \frac{\partial y}{\partial z} \cdot \frac{\partial z}{\partial x}$.

<u>פתרון:</u>

לפי משפט הפונקציה הסתומה:

$$\frac{\partial x}{\partial y} \cdot \frac{\partial y}{\partial z} \cdot \frac{\partial z}{\partial x} = \left(-\frac{F_y}{F_x}\right) \cdot \left(-\frac{F_z}{F_y}\right) \cdot \left(-\frac{F_x}{F_z}\right) = -1$$

משפט הפונקציה הסתומה למערכת של משוואות:

נתבונן ב־m משוואות עם $n+m$ נעלמים:

$$F_i(x_1,\ldots,x_n,y_1,\ldots,y_m)=0, 1\le i\le m$$

נניח שכל הפונקציות F_i גזירות ברציפות לפי כל המשתנים בסביבה D של נקודה $A=(x_1^0,\ldots,x_n^0,y_1^0,\ldots,y_m^0)$.

כמו כן, נניח ש־$F_i(A)=0$ לכל i והיעקוביאן בנקודה P שונה מ־0.

אזי, קיימת סביבה U של P כך שבסביבה זו המערכת מגדירה m פונקציות גזירות ברציפות:

$$y_k(x_1,\ldots,x_n), 1\le k\le m$$

והנגזרת לפי משתנה מסויים נתונה ע"י:

$$\frac{\partial y_k}{\partial x_j}=\frac{\left|\frac{\partial F_i}{\partial x_j}\right|}{\left|\frac{\partial F_i}{\partial y_k}\right|}$$

כאשר $\frac{\partial F_i}{\partial y_k},\frac{\partial F_i}{\partial x_j}$ הן מטריצות: $\left(\frac{\partial F_i}{\partial y_k}\right)_{ij}=(F_i)_{y_j}$.

<u>תרגיל:</u>

נתבונן במערכת:

$$xe^{u+v}+2uv=1$$

$$ye^{u-v}-\frac{u}{1+v}=2x$$

1. הוכיחו כי המערכת מגדירה פונקציות דיפרנציאביליות $u(x,y)$ ו־$v(x,y)$, כך ש: $u(1,2)=v(1,2)=0$.

<u>פתרון:</u>

נבדוק שהמערכת מקיימת את תנאי המשפט.

נגדיר פונקציה:

$$f(x,y,u,v)=(F_1,F_2)=(xe^{u+v}+2uv-1, ye^{u-v}-\frac{u}{1+v}-2x)$$

הנקודה שלנו היא $(1,2,0,0)$.

אכן מתקיים: $f(1,2,0,0)=(0,0)$.

הנגזרות לפי כל משתנה של F_1, F_2 גזירות ברציפות, ומתקיים:

$$J_f(1,2,0,0) = \begin{vmatrix} (F_1)_u & (F_1)_v \\ (F_2)_u & (F_2)_v \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} xe^{u+v} + 2v & xe^{u+v} + 2u \\ ye^{u-v} - \frac{1}{1+v} & -ye^{u-v} + \frac{u}{(1+v)^2} \end{vmatrix}$$

ובנקודה שלנו נקבל:

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -2 \end{vmatrix} = -3 \neq 0$$

ולכן כל תנאי המשפט מתקיימים, ולכן המערכת מגדירה פונקציות $u(x,y)$ ו-$v(x,y)$ גזירות ברציפות.

מכיוון שהן גזירות ברציפות הן בוודאי דיפרנציאביליות.

2. מצאו את $du(1,2)$.

<u>פתרון:</u>

נחשב את הנגזרות החלקיות של u לפי שני המשתנים. לפי x:

$$\frac{\partial u}{\partial x} = -\frac{\begin{vmatrix} (F_1)_x & (F_1)_v \\ (F_2)_x & (F_2)_v \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} (F_1)_u & (F_1)_v \\ (F_2)_u & (F_2)_v \end{vmatrix}} = \frac{\begin{vmatrix} e^{u+v} & xe^{u+v} + 2u \\ -2 & -ye^{u-v} + \frac{u}{(1+v)^2} \end{vmatrix}}{-3}$$

ובנקודה שלנו:

$$= \frac{\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ -2 & -2 \end{vmatrix}}{-3} = 0$$

לפי y:

$$\frac{\partial u}{\partial y} = \frac{\begin{vmatrix} (F_1)_y & (F_1)_v \\ (F_2)_y & (F_2)_v \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} (F_1)_u & (F_1)_v \\ (F_2)_u & (F_2)_v \end{vmatrix}} = \frac{\begin{vmatrix} 0 & xe^{u+v} + 2u \\ e^{u-v} & -ye^{u-v} + \frac{u}{(1+v)^2} \end{vmatrix}}{-3}$$

ובנקודה שלנו:

$$= \frac{\begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 1 & -2 \end{vmatrix}}{-3} = -\frac{1}{3}$$

ולכן:

$$du(1,2) = \frac{\partial u}{\partial x}(1,2) \cdot dx + \frac{\partial u}{\partial y}(1,2) \cdot dy = -\frac{1}{3}dy$$