תרגיל 3 - אינפי 3

20 בנובמבר 2017

1. נאמר שפונקציה $f:U\to\mathbb{R}^n$ רציפה במידה שווה על $S\subseteq U$ אם לכל $\epsilon>0$ קיים $\delta>0$ כך שלכל $x,y\in S$ אם $\|x-y\|<\delta$ אזי $\|f(x)-f(y)\|<\epsilon$.
   (א) הראו שם U חסומה ו $f:U\to\mathbb{R}^n$ רציפה במידה שווה על U אזי f חסומה.
   (ב) הביאו דוגמא ל U חסומה ו $f:U\to\mathbb{R}^n$ רציפה שאינה חסומה על U.
   (ג) הראו שאם $f:U\to\mathbb{R}^n$ רציפה במידה שווה ו $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ סדרת קושי, אזי $\{f(a_n)\}_{n\in\mathbb{N}}$ סדרת קושי.

2. יהיו $\emptyset\neq C,D\subseteq\mathbb{R}^n$. נגדיר מרחק בינהן על ידי

$$d(C,D)=\inf\{\|x-y\|\,|x\in C,y\in D\}.$$

תהי $a\in\mathbb{R}^n$, $D\subseteq\mathbb{R}^n$. נגדיר את המרחק מ a ל D על ידי

$$d(a,D)=\inf\{\|a-x\|\,d\in D\}.$$

   (א) הראו שאם $D\subseteq\mathbb{R}^n$ סגורה ו $a\in\mathbb{R}^n$ אזי קיימת נקודה $x\in D$ כך ש $d(a,x)=\|a-x\|$.
   (ב) הראו שאם $C\subseteq\mathbb{R}^n$ קומפקטית ו D סגורה אזי קיימים $x\in C$ ו $y\in D$ כך ש $\|x-y\|=d(C,D)$.
   (ג) האם התוצאה של סעיף אחרון נכונה עם מחליפים את C בקבוצה סגורה במקום קומפקטית? אם לא - הראו דוגמא נגדית.

3. נאמר ש $f:U\to\mathbb{R}^n$ מקיימת את תנאי ליפשיץ אם קיים M כך שלכל $x,y\in U$ מתקיים

$$\|f(x)-f(y)\|\leq M\|x-y\|$$

לכל $x,y\in U$.הראו שאם f מקיימת את תנאי ליפשיץ היא רציפה במידה שווה על U.

4. יהי $U\subseteq\mathbb{R}^2$. נאמר ש $f:U\to\mathbb{R}^n$ מקיימת תנאי ליפשיץ לפי y אם קיים M כך שלכל $(x,y_1),(x,y_2)\in U$ מתקיים

$$\|(x,y_1)-(x,y_2)\|\leq M|y_1-y2|.$$

נאמר ש f רציפה לפי x אם לכל y_0 שעבורו קיים $(x,y_0)\in U$ הפונקציה $f(x,y_0)$ רציפה ב x . נניח ש f רציפה ב x ומקיימת את תנאי לפשיץ ב y. האם f רציפה ב U?

5. האם קיימת פונקציה רציפה בעיגול היחידה $\overline{B((0,0),1)}$ כך ש $f(x,y)=x\ln\left(x^2+3y^2\right)$?

6. האם קיימת פונקציה רציפה ב $\mathbb{R}^2$ כך שלכל $(x,y)\neq(0,1)$ מתקיים $f(x,y)=\arctan\frac{x^2+1}{x^2+(y-1)^2}$.

7. עבור הפונקציה הבאה קבעו האם קיימים הגבולות החוזרים והגבול ב $(0,0)$, ומידה וכן, וחשבו אותם.

(א)

$$f\left(x,y\right)=\begin{cases}\frac{\sin x-\sin y}{\tan x-\tan y} & \tan x\neq\tan y\\ \cos^{3}x & \tan x=\tan y\end{cases}$$

(ב)

$$f\left(x,y\right)=\begin{cases}\left(x+y\right)\sin\frac{1}{x}\sin\frac{1}{y} & x\neq0\wedge y\neq0\\ 0 & x=0\vee y=0\end{cases}$$