הגדרה

יהי X מ"ט, $A\subseteq X$.
נגדיר את הפנים של A באופן הבא:

$$\operatorname{int}(A)=\bigcup_{\substack{O\subseteq A\\ O\text{ is open}}}O$$

(סימון נוסף - $\mathring{A}$)
כלומר $\operatorname{int}(A)$ היא הפתוחה המקסימלית המוכלת בA.
אפיון נוסף: $x\in\operatorname{int}(A)$ $\Leftrightarrow$ קיימת U פתוחה כך ש$x\in U\subseteq A$.

תרגיל

מצאו סגור ופנים של הקבוצה הבאה ב$\mathbb{R}^2$:

$$A=\left\{(x,y)\in\mathbb{R}^2\middle|x\geq0,y\neq0\right\}$$

(כלומר חצי מישור שמאלי, לא כולל ציר הx)

פתרון

נראה ש

$$\operatorname{int}(A)=C=\left\{(x,y)\in\mathbb{R}^2\middle|x>0,y\neq0\right\}$$

נוכיח את השוויון באמצעות הכלה דו כיוונית.

$\supseteq$

$$\begin{array}{ccccc} B & = & \{(x,y)|x>0\} & \cap & \{(x,y)|y\neq0\}\\ & & \| & & \|\\ & & \underbrace{P_1^{-1}}_{\text{continuous}}\left(\underbrace{(0,\infty)}_{\text{open}}\right) & \cap & \underbrace{P_2^{-1}}_{\text{continuous}}\left(\underbrace{\mathbb{R}-\{0\}}_{\text{open in }\mathbb{R}}\right)\end{array}$$

(תזכורת - P הן הטלות)

B פתוחה כחיתוך סופי של פתוחות.

$B\subseteq A$ וכן B פתוחה ולכן $B\subseteq\operatorname{int}A$

$\subseteq$ צ"ל $B\subseteq\operatorname{int}(A)$, $\operatorname{int}(A),B\subseteq A$. לכן מספיק להוכיח $A\backslash B\subseteq A\backslash\operatorname{int}(A)$.

תהי $(x,y)\in A\backslash B$. מהגדרת A וB נובע ש$x=0$. כלומר הנקודה היא מהצורה $(0,y)$. לכל U סביבה של $(0,y)$ קיים $\varepsilon>0$ כך ש$U\supseteq B((0,y),\varepsilon)$ $\ni(0,y)$.

$U \supseteq B\left(\left(0,y\right),\varepsilon\right) \ni \left(-\frac{\varepsilon}{2},y\right) \notin A$ - כלומר לכל U סביבה של A $U \not\subseteq A$. לכן $(0,y) \in A \backslash \operatorname{int} A$.

נראה ש$\operatorname{cl}\left(A\right) = D = \left\{(x,y) | x \geq 0\right\}$:

$\subseteq$ $D = \underbrace{P_1^{-1}}_{\text{continuous}}\left(\underbrace{[0,\infty]}_{\text{closed in } \mathbb{R}}\right)$ ולכן D סגורה. $A \subseteq D$ ולכן $\operatorname{cl}\left(A\right) \subseteq D$.

$\supseteq$ צ"ל $D \subseteq \operatorname{cl}\left(A\right)$. תהי $(x,y) \in D$. נראה שקיימת סדרה בA השואפת אליה. שני מקרים:

1. $A \ni (x,y)$. ניקח את הסדרה הקבועה (x,y).
2. $A \not\ni (x,y)$. כלומר $(x,y) = (x,0)$. ניקח את הסדרה
$$A \supseteq \left\{\left(x,\frac{1}{n}\right)\right\}_{n\in\mathbb{N}} \to (x,0)$$

הגדרה

יהי X מ"ט ותהי $A \subseteq X$. נאמר שA <u>צפופה</u> בX אם $\operatorname{cl}\left(A\right) = X$.

טענה(הוכחנו בהרצאה)

A צפופה בX $\Leftrightarrow$ $A \cap U \neq \emptyset$ לכל $U \neq \emptyset$ פתוחה.

תרגיל

יהי $(\mathbb{R}, \tau_{\text{cof}})$. הוכיחו:

א. לכל $A \subseteq \mathbb{R}$ מתקיים: A פתוחה או בעלת פנים ריק.

ב. כל קבוצה סופית $F \subseteq \mathbb{R}$ היא סגורה.

ג. כל קבוצה אינסופית <u>צפופה</u> ב$\mathbb{R}$.

פתרון

א. נניח ש$A \subseteq \mathbb{R}$ אינה פתוחה ונראה ש$\operatorname{int}\left(A\right) \neq \emptyset$. A אינה פתוחה ולכן A^c אינסופית.
תהי $A \supseteq O \neq \emptyset \Leftarrow O^c \supseteq A^c \Leftarrow O^c$ אינסופית. כמו כן $O \neq \emptyset$, לכן O אינה פתוחה. כלומר ה<u>פתוחה היחידה</u> המוכלת בA היא $\emptyset$, ולכן $\operatorname{int}\left(A\right) = \emptyset$.

ב. תהי F סופית. $F = \left(F^c\right)^c$ סופית, ולכן F^c פתוחה $\Leftarrow F$ סגורה.

ג. תהי A אינסופית. הסגורות בטופולוגיה הקו־סופית הן $\mathbb{R}$ והסופיות. לכן הקבוצה הסגורה היחידה המכילה את A היא $\mathbb{R}$.

תרגיל

יהי (X,d) מרחב מטרי כך ש$2<|X|\leq\aleph_0$. הוכיחו שהמרחב לא קשיר.

פתרון

ניזכר שבהינתן $a\in X$ הפונקציה $f_a:X\to\mathbb{R}$ המוגדרת $\forall_{x\in X}f_a\left(x\right)=d\left(x,a\right)$ היא רציפה.

נניח בשלילה שX קשיר.

$f_a\left(a\right)=0$. לפי ההנחה קיימת $a\neq x\ni X$. $f_a\left(x\right)=d\left(a,x\right)>0$. נסמן $f_a\left(x\right)=\varepsilon$. ע"פ משפט ערך הביניים($X$ קשיר, f_a רציפה) לכל $0<c<\varepsilon$ קיים $y\in X$ כך ש$f_a\left(y\right)=c$. אבל

$$|f_a\left(X\right)|\leq|X|\leq\aleph_0<\aleph=|\left(0,\varepsilon\right)|\leq|f_a\left(X\right)|$$

הגדרה

מ"ט X נקרא קשיר מסילתית אם לכל $x,y\in X$ קיימת מסילה רציפה $f\left[0,1\right]\to X$ כך ש$f\left(0\right)=x,f\left(1\right)=y$.

תזכורת

ראינו בהרצאה שקשירות מסילתית $\Leftarrow$ קשירות. ההיפך לא נכון בהכרח(יש דוגמה נגדית).

הגדרה

תהי C קבוצה במ"ו כלשהו. נאמר שC קמורה אם לכל $x,y\in C$ מתקיים

$$\forall_{t\in[0,1]}\left(1-t\right)x+ty\in C$$

טענה

יהי $(X,\|\cdot\|)$ מרחב נורמי, $C\subseteq X$ קמורה. הוכיחו כי C קשירה מסילתית.

"הוכחה"

לכל $x,y\in C$ ניקח את המסילה $f:\left[0,1\right]\to C$ המוגדרת ע"י $f\left(t\right)=\left(1-t\right)x+ty$.

דוגמה לקבוצה קמורה

בכל מרחב נורמי $(X,\|\cdot\|)$ולכל $a\in X$ ו$\varepsilon>0$, $B\left(a,\varepsilon\right)$ ו$B\left[a,\varepsilon\right]$ קמורים.

תרגיל

יהי (X,τ) מ"ט, $A\subseteq X$ תת מרחב קשיר.
הוכיחו או הפריכו - $\operatorname{int}(A)$ קשיר.

פתרון

שני עיגולים(כדורים סגורים ב$\mathbb{R}^2$) B,C המשיקים בנק'.
B,C קמורים ולכן קשירים מסילתית ולכן קשירים.
$B\cap C\neq\emptyset \Leftarrow A=B\cup C$ קשיר.
$\operatorname{int}(A)=D\cup E$ כאשר D,E כדורים פתוחים, לא ריקים, ו$D\cap E=\emptyset$ - לכן $\operatorname{int}(A)$ לא קשיר.

טענה

תהי $f=(f_1,\dots f_n):\overbrace{A}^{\subseteq\mathbb{R}}\to\mathbb{R}^n$.
אזי f רציפה $\Leftrightarrow$ f_n רציפה לכל $1\leq i\leq n$

הוכחה: אינפי 3

הגדרה(הומיאומורפיזם)

תהי $f:X\to Y$ פונקציה בין שני מ"ט.
נאמר שf היא הומיאומורפיזם(הומיאו' בקיצור) אם f <u>רציפה</u>, <u>הפיכה</u> ו<u>f^{-1} רציפה</u>.

באופן שקול: f <u>רציפה</u> הפיכה <u>ופתוחה</u>.

שקול נוסף: f <u>רציפה</u> הפיכה <u>וסגורה</u>.

תרגיל

תהי $A\subseteq\mathbb{R}$ ו$f:A\to\mathbb{R}$ <u>רציפה</u>. הוכיחו ש$\operatorname{Gr}_f:=\{(x,f(x))|x\in A\}$ הומיאומורפי לA.

פתרון

נגדיר $h:A\to\operatorname{Gr}_f$ ע"י $h(x)=(x,f(x))$.
נגדיר פונקציית עזר $\bar{h}:A\to\mathbb{R}^2$ המוגדרת ע"י $\bar{h}(x)=(x,f(x))$.
$\bar{h}_1:A\to\mathbb{R}$ המוגדרת ע"י $\bar{h}_1(x)=x$ זוהי בדיוק פונקציית ההכלה שהינה <u>רציפה</u>.
$\bar{h}_2=f$ רציפה ע"י הנתון.
לכן ע"פ הטענה הקודמת $\bar{h}$ רציפה.
h מתקבלת מ$\bar{h}$ ע"י צמצום הטווח ($\bar{h}(A)=\operatorname{Gr}_f$), ומכיוון ש$\bar{h}$ רציפה אז גם h.
$g:\operatorname{Gr}_f\to A$ המוגדרת ע"י $g(x,f(x))=x$ היא ההופכית של h. נראה שg רציפה.
נתבונן ב$P_1|_{\operatorname{Gr}_f}:\operatorname{Gr}_f\to A$(צמצום התחום והטווח), גם היא רציפה ומתקיים $g=P_1|_{\operatorname{Gr}_f}$.
לכן h הומיאומורפיזם.

מסקנה

יהי $A \subseteq \mathbb{R}$ תת מרחב ו-$f : A \to \mathbb{R}$ רציפה. אזי:

א. A קשיר $\Leftrightarrow$ Gr_f קשיר.

ב. A קשיר מסילתית $\Leftrightarrow$ Gr_f קשיר מסילתית.

הסבר

A ו-Gr_f הומיאומורפים. הומיאו' מעביר מרחב קשיר(מסילתית) לקשיר(מסילתית).

תרגיל

נתבונן בשלושה תתי מרחבים של $\mathbb{R}^2$:

I) מעגל

II) שני מעגלים משיקים

III) שני מעגלים חותכים

האם הם הומיאומורפיים זה לזה?

פתרון

לכאורה נראה שכן - שלושתם קשירים מסילתית ולכן קשירים. אבל:

- אם מוציאים מ-I נקודה, הוא נשאר קשיר, אבל אפשר להוציא שתי נקודות והוא כבר לא יהיה קשיר.
- ניתן להוציא מ-II את נקודת ההשקה, והוא יהפוך ללא קשיר.

לכן I ו-II לא הומיאומורפים.

- ב-I, לכל שתי נקודות שנוציא המרחב לא קשיר.
- ב-III, קיימות 2 נקודות שנוציא כך שהמרחב ישאר קשיר.

לכן I ו-III לא הומיאומורפים.